Početní praktikum 1

4. zápočtová písemka[1]

doba řešení - 240 minut

1. Vypočítejte derivaci $f'(x)$ funkce $f(x) = x^{\ln x} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $f'(x) = \dfrac{x^{\ln x - 3}}{\sqrt{1+x^2}} \left[\ln x \left(2+2x^2\right) - \left(2+x^2\right)\right]$, $x > 0$.

2. Vypočítejte určitý integrál $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+2}{x^2+2x+3}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{1} = \ln\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

3. Kruhová deska o poloměru R je elektricky nabitá s plošnou hustotou náboje σ. Vypočítejte celkový elektrický náboj Q desky (velikost náboje by v případě $\sigma =$ konst. byla dána jejím součinem s velikostí příslušné plochy, $Q = \sigma S$), pokud $\sigma = A\ln\left(3r^2+B\right) + Ar$, kde A, B jsou kladné konstanty a r je vzdálenost od středu desky. (2,5 bodu)

   Výsledek: $Q = \dfrac{\pi A}{3}\left[\left(3R^2+B\right)\ln\left(3R^2+B\right) - B\ln B + 2R^3 - 3R^2\right]$.

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}'$ složky $(1,1,1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{e}_1{}' - 2\,\vec{e}_2{}' - 3\,\vec{e}_3{}', \\
\vec{e}_2 &= 2\,\vec{e}_1{}' - \vec{e}_2{}' - \vec{e}_3{}', \\
\vec{e}_3 &= -\vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}' + \vec{e}_3{}'.
\end{aligned}
$$

   Určete matici $\boldsymbol{T}$ přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici $\boldsymbol{S}$ přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}$. Je báze $\mathcal{B}$ ortonormální (uveďte důvod) ? (2,5 bodu)

   Výsledek: $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B})} = (0,2,3)$, báze $\mathcal{B}$ není ortonormální.

5. Pomocí vhodné substituce řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $x^3y' = x^2y + x\ln(x^{-2})]$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{1}{2x}\left(\ln x^2 + 1\right) + Cx$, $x \neq 0$.

6. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = -\dfrac{4x}{x^2+4}y + \dfrac{1}{(x^2+4)^3}$, se stanovenou počáteční podmínkou $y(0) = \dfrac{1}{8}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + 4\right]\left(x^2+4\right)^{-2}$.

7. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' + 8y' + 16y = \mathrm{e}^{-4x}\ln x$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \left[C_1 + C_2\,x + \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{-4x}$, $x > 0$.

---

[1] Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.

8. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} [(2-x)\cos x - \sin x]$.

9. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$, která působí po následující křivce: nejprve po úsečce z bodu (1,1,0) do bodu (2,1,0), dále po čtvrtkružnici (kdy $z = 0$) se středem v bodě (1,1,0) v matematicky kladném směru z bodu (2,1,0) do bodu (1,2,0) a nakonec po úsečce z bodu (1,2,0) do bodu (1,1,1). (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = \dfrac{\pi + 1}{2}$.

10. Dokažte, že centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\ln r$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete potenciální energii pole v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud stanovíme její hodnotu v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ je jako nulovou. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

    Výsledek: $E_\mathrm{p}(X_0, Y_0, Z_0) = \dfrac{k}{2}\left[\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)\left(\ln\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right]$.

11. Vypočítejte polohu těžiště homogenního tělesa $\mathcal{T} = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \in \langle 100, 225\rangle,\ z \geq 0\right\}$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = \dfrac{15}{8}\dfrac{(3^4 - 2^4)}{(3^3 - 2^3)} \approx 6{,}4$.

12. Hypotetické fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = -2\,(r+1)^2 + 4r$, kde r je velikost polohového vektoru $\vec{r}$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $\vec{E} = 4(x, y, z) = 4\vec{r}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12$.