Početní praktikum 1 — 4. zápočtová písemka

1. Vypočítejte derivaci $f'(1)$ funkce $f(x) = (axe^x)^{\frac{b\ln x}{x^2}}$, kde a, b jsou konstanty. Určete průnik definičních oborů zadané a výsledné funkce a podmínku pro konstantu a. (2,5 bodu)

   Výsledek: $f'(x) = \frac{b}{x^3}(axe^x)^{\frac{b\ln x}{x^2}}\left[(1+x)\ln x + \ln(axe^x)(1-2\ln x)\right]\Big|_1 = b(1+\ln a)$.

2. Vypočítejte integrál funkce $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2x - \frac{1}{2}\right)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\left[\operatorname{tg} x\left(2x-\frac{1}{2}\right) + 2\ln\cos x + x\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 1.$

3. Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem od osy válce klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí $p = \dfrac{p_0}{1+\left(\frac{r}{10}\right)^2}$, kde p_0 je tlak plynu v ose válce, r je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby. (2,5 bodu)

   Výsledek: $200\pi p_0\left[\frac{RH}{100+R^2} + \ln\left(1+\frac{R^2}{100}\right)\right]$.

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}'$ složky $(1,1,1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{e}\,'_1 - 2\vec{e}\,'_2 - 3\vec{e}\,'_3,\\
\vec{e}_2 &= 2\vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2 - \vec{e}\,'_3,\\
\vec{e}_3 &= -\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3.
\end{aligned}$$

   Určete matici T přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici S přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}$. Je báze $\mathcal{B}$ ortonormální (uveďte důvod)? (2,5 bodu)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \vec{a}_{(\mathcal{B})} = (0,2,3),\ \text{báze } \mathcal{B} \text{ není ortonormální.}$$

5. Pomocí vhodné substituce řešte obyčejnou diferenciální rovnici (ODR) 1. řádu $y' = 1 + (x-y)^2$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = x - \frac{1}{x+\mathrm{C}}$, $x \neq -\mathrm{C}$

6. Řešte nehomogenní ODR 1. řádu $y' = 2x^2 - y + 1$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = 2x^2 - 4x + 5\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

7. Řešte homogenní ODR 2. řádu $y'' - 8y' + 32y = 0$ s okrajovými podmínkami $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{e}^{4x-2\pi}(\cos 4x - \sin 4x)$.

8. Řešte nehomogenní ODR 2. řádu $y'' + 4y' + 4y = \sin(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{e}^{-2x} + 3x\mathrm{e}^{-2x} - \sin(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

9. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (x - y, x, 0)$, která působí po následující uzavřené křivce ($z = 0$): nejprve po úsečce z bodu $(1, 1)$ do bodu $(1, 2)$, dále po čtvrtkružnici se středem v bodě $(1, 1)$ v matematicky záporném směru do bodu $(2, 1)$ a nakonec po úsečce zpět do výchozího bodu. Je toto silové pole konzervativní? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = -\frac{\pi}{2}$, pole není konzervativní.

10. Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\ln(r^2)$, definované pro $r > 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud její hodnota v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ je stanovena jako nulová. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

    Výsledek: $E_\mathrm{p}(X_0, Y_0, Z_0) = \dfrac{k}{2}\left\{\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)\left[\ln\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right) - 1\right] + 1\right\}$.

11. Odvoďte moment setrvačnosti J_k duté koule o poloměru R s kulovou koncentrickou dutinou o poloměru H, s konstantní hustotou ρ, rotující okolo osy, procházející jejím středem. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti M duté koule, jejího poloměru R a poloměru dutiny H. Pomocí limitního přechodu (nebo jiným způsobem) odvoďte moment setrvačnosti J_s homogenní kulové slupky o poloměru R. (2,5 bodu)

    Výsledek: $J_k = \dfrac{2}{5}M\dfrac{R^5 - H^5}{R^3 - H^3}$, $J_s = \lim\limits_{H \to R} J_k = \dfrac{2}{3}MR^2$.

12. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = Ar^3 + B$, kde konstanta A škáluje velikost r polohového vektoru $\vec{r}$, konstanta B nastavuje hodnotu potenciálu ϕ v bodě $(0, 0, 0)$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 12Ar$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $\vec{E} = 3A\vec{r}\,r = 3A(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12Ar = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.