Početní praktikum 1

4/0 zápočtová písemka

doba řešení - 180 minut

1. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = (ax\sin x)^{\frac{b\sin x}{x}}$, kde a, b jsou konstanty. (2,5 bodu)

   Výsledek: $f'(x) = b\,(ax\sin x)^{\frac{b\sin x}{x}} \left[\frac{\sin x + x\cos x}{x^2} + \ln(ax\sin x)\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)\right].$

2. Vypočítejte integrál funkce $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\left[\ln(x^2-4x+5) + 3\,\mathrm{arctg}(x-2)\right]_2^3 = \ln 2 + \dfrac{3\pi}{4}.$

3. Válcová nádoba o poloměru R a výšce H je zcela vyplněna plynem, jehož tlak směrem od osy válce klesá. Pokles tlaku je vyjádřen funkcí $p = \dfrac{p_0}{1+\left(\frac{r}{10}\right)^2}$, kde p_0 je tlak plynu v ose válce, r je vzdálenost od osy válce. Vypočítejte celkovou sílu, kterou plyn působí na všechny stěny nádoby[1]. (2,5 bodu)

   Výsledek: $200\pi p_0\left[\dfrac{RH}{100+R^2} + \ln\left(1+\dfrac{R^2}{100}\right)\right].$

4. Vektor $\vec{a}$ má v *ortonormální* bázi $\mathcal{B}'$ složky $(1,1,1)$. Přechod mezi bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ je dán vztahy

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{e}\,'_1 - 2\vec{e}\,'_2 - 3\vec{e}\,'_3,\\
\vec{e}_2 &= 2\,\vec{e}\,'_1 - \vec{e}\,'_2 - \vec{e}\,'_3,\\
\vec{e}_3 &= -\vec{e}\,'_1 + \vec{e}\,'_2 + \vec{e}\,'_3.
\end{aligned}$$

   Určete matici T přechodu z báze $\mathcal{B}$ do báze $\mathcal{B}'$, matici S přechodu z báze $\mathcal{B}'$ do báze $\mathcal{B}$ a složky vektoru $\vec{a}$ v bázi $\mathcal{B}$. Je báze $\mathcal{B}$ ortonormální (uveďte důvod)? (2,5 bodu)

   $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_{(\mathcal{B})} = (0,2,3)$, báze $\mathcal{B}$ není ortonormální.

5. Pomocí vhodné substituce řešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = 1 + (x-y)^2$. Určete průnik definičních oborů zadané rovnice a výsledné funkce. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = x - \dfrac{1}{x+\mathrm{C}}$, $x \neq -\mathrm{C}$

6. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu $y' = 2x^2 - y + 1$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = 2x^2 - 4x + 5\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$

7. Řešte homogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' - 8y' + 32y = 0$ s okrajovými podmínkami $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{e}^{4x-2\pi}\,(\cos 4x - \sin 4x).$

[1] Ve výsledcích příkladů s fyzikálními veličinami nejsou uváděny příslušné jednotky.

8. Řešte nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x} \sin x$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $y = \mathrm{e}^{-2x}(3x - \sin x + 1)$.

9. Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{F}(x, y) = (x - y, x)$, která působí po následující uzavřené křivce: nejprve po úsečce z bodu $(1, 1)$ do bodu $(1, 2)$, dále po čtvrtkružnici se středem v bodě $(1, 1)$ v matematicky záporném směru do bodu $(2, 1)$ a nakonec po úsečce zpět do výchozího bodu. Je toto silové pole konzervativní? (2,5 bodu)

   Výsledek: $W = -\frac{\pi}{2}$, pole není konzervativní.

10. Dokažte, že dané centrální silové pole $\vec{F} = -k\,\vec{r}\,\ln(r^2)$, definované pro $r \geq 1$, je konzervativní a určete odpovídající potenciální energii v bodě $x, y, z = (X_0, Y_0, Z_0)$, pokud její hodnota v minimální definované vzdálenosti od bodu $x, y, z = (0, 0, 0)$ je stanovena jako nulová. Veličina k je konstanta, $\vec{r}$ je polohový vektor, r je jeho velikost. (2,5 bodu)

    Výsledek: $E_\mathrm{p}(X_0, Y_0, Z_0) = \dfrac{k}{2}\left\{\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)\left[\ln\left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right) - 1\right] + 1\right\}$.

11. Určete moment setrvačnosti prázdné uzavřené válcové nádoby, tj. sestávající z pláště a obou podstav, vytvořené z materiálu zanedbatelné tloušťky s konstantní plošnou hustotou σ, s poloměrem R a výškou $H = R$, rotující okolo svojí geometrické osy. Výsledek vyjádřete v jednotkách hmotnosti nádoby a poloměru. (2,5 bodu)

    Výsledek: $J = \dfrac{3}{4} M R^2$.

12. Hypotetické centrální fyzikální pole je určeno potenciálem $\phi = -Ar^3 + B$, kde konstanta A škáluje velikost r polohového vektoru $\vec{r}$, konstanta B nastavuje hodnotu potenciálu ϕ v bodě $x, y, z = (0, 0, 0)$. Určete vektor intenzity $\vec{E}$ tohoto pole a dokažte, že divergence tohoto pole, tedy $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 12Ar$. (2,5 bodu)

    Výsledek: $\vec{E} = 3A\vec{r}\,r = 3A(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 12Ar = 12A\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.