

Počtení praktikum 2

3a. jarní zápočtová písemka¹ doba řešení - 60 minut

1. Rozviňte funkci $f(x) = |x| + a$, $x \in \langle -L, L \rangle$ (kde a je konstanta) do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } f(x) = a + \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

2. Zadané číslo $\sqrt[3]{-5 + \frac{15i}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } 10^{1/3} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], 10^{1/3} e^{i\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0, 1, 2$$

3. Imaginární část v holomorfní funkce $f(z)$ komplexní proměnné z má tvar $v = y - \sin x \sinh y$, kde x je $\text{Re}(z)$, y je $\text{Im}(z)$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce z . (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } f(z) = z + \cos z + C$$

4. Tenzor napětí T_{ij} lze zapsat formou

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

kde v_i jsou složky vektoru rychlosti, p je skalární tlak, η a λ jsou konstanty (koeficienty dynamické a dilatační viskozity). Napište explicitní podobu prvků T_{xx} a T_{xy} tohoto tenzoru a také divergenci tohoto tenzoru (v kartézské soustavě) pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } T_{xx} = -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

$$T_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} \quad (\text{Einsteinova notace}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (\text{vektorový zápis}).$$

¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.