Početní praktikum 2

1a. jarní zápočtová písemka

1. Dokažte platnost vektorové identity:
   $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \nabla^2\vec{A}.$ (2,5 bodu)

   Výsledek: Na obou stranách bude vektor $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_x, A_y, A_z)$.

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu:
   $\iint_S y^2 x \,\mathrm{d}S$, kde $S = \left\{x - y^2 - z^2 = 0,\ x \in \langle 0, H\rangle\right\}$. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\frac{\pi}{128}\left\{\frac{2}{7}\left[(4H+1)^{7/2} - 1\right] - \frac{4}{5}\left[(4H+1)^{5/2} - 1\right] + \frac{2}{3}\left[(4H+1)^{3/2} - 1\right]\right\}$, jde o paraboloid s vrcholem v bodě $(0,0,0)$, jehož osu tvoří kladná část osy x, s výškou H a s poloměrem podstavy $R = \sqrt{H}$.

3. Určete polohu středu hmotnosti plochy: $S = \left\{x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \in \langle 0, 5\rangle\right\}$,

   jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = |x| + |y| + z^2$. Načrtněte zadanou plochu, výsledek vyčíslete přibližně ($\pi \approx 3$). (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = \frac{60\pi + 60}{15\pi + 16} \approx 4$, jde o kužel s vrcholem v bodě $(0,0,0)$, jehož osu tvoří kladná část osy z.

4. Nádoba ve tvaru polokulové mísy je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou i se vzdáleností od vertikální osy jako $p = \rho g h(1 + \tilde{r})$, kde ρ je hustota kapaliny, h je hloubka daného místa v nádobě a $\tilde{r}$ je vzdálenost od vertikální osy nádoby. Poloměr nádoby $R = 1\,\mathrm{m}$. Určete přibližně tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Pro vyčíslení uvažujte hodnoty konstant $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, násobky π spočítejte přibližně ($\pi \approx 3$). Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

   Výsledek: $F_p \approx 5 \times 10^4\,\mathrm{N}$.