Početní praktikum 2

1b. jarní zápočtová písemka

1. Dokažte platnost vektorové identity:
   $\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}-\frac{1}{2}\vec{\nabla}A^2=\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\times\vec{A}.$ (2,5 bodu)

   Výsledek: Na obou stranách bude vektor jehož složky budou postupně všechny sudé permutace i, j, k, kde $i = x, y, z$: $A_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}+A_k\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-A_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-A_k\frac{\partial A_k}{\partial x_i}$.

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu:
   $8\sqrt{3}\iint_S xy\,\mathrm{d}S$, kde $S = \{x+y+z=1,\ x\in\langle 0,1\rangle \wedge y, z\geq 0\}$. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\left[6x^2-8x^3+3x^4\right]_0^1 = 1$, jde o rovinnou plochu, ohraničenou trojúhelníkem s vrcholy v bodech $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

3. Určete polohu středu hmotnosti plochy: $S = \left\{x^2+y^2-z^2=0,\ z\in\langle 0,5\rangle\right\}$,
   jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = |xy|+z^2$. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = 4$, jde o kužel s vrcholem v bodě $(0,0,0)$, jehož osu tvoří kladná část osy z.

4. Nádoba ve tvaru kužele, stojícího „na špičce", s poloměrem horní plochy $R = 1\,\mathrm{m}$ a výškou $H = 1\,\mathrm{m}$, je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou i se vzdáleností od vertikální osy jako $p = \rho g h(1+r)$, kde ρ je hustota kapaliny, h je hloubka daného místa v nádobě a r je vzdálenost od vertikální osy nádoby. Určete přibližně tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Pro vyčíslení uvažujte hodnoty konstant $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, násobky π spočítejte přibližně ($\pi\approx 3$). Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

   Výsledek: $F_p \approx 2,1\times 10^4\,\mathrm{N}$.