Početní praktikum 2

3a. jarní zápočtová písemka

1. Rozviňte funkci $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle -2, -1) \\ |x| & x \in \langle -1, 1) \\ 1 & x \in \langle 1, 2) \end{cases}$ do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 \right] \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$

2. Zadané číslo $\sqrt[7]{\frac{6}{\sqrt{3}} - 6\mathrm{i}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

   Výsledek: $(4\sqrt{3})^{1/7} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{5\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right) \right]$, $(4\sqrt{3})^{1/7}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}\right)}$, $k = 0, \ldots, 6$

3. Imaginární část v holomorfní funkce $f(z)$ komplexní proměnné z má tvar $v = -\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \mathrm{e}^x \sin y$, kde x je $\mathrm{Re}(z)$, y je $\mathrm{Im}(z)$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce z. (2,5 bodu)

   Výsledek: $f(z) = \ln\left(\frac{1}{z}\right) + \mathrm{e}^z + \mathrm{C}$

4. Tenzor viskózního napětí σ_{kl} lze zapsat například formou

$$\sigma_{kl} = \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \right) + \lambda \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{kl},$$

   kde v_i jsou složky vektoru rychlosti a η i λ jsou konstanty (koeficient dynamické viskozity, koeficient dilatační viskozity). Pomocí Einsteinovy symboliky napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru. Napište rovněž explicitní podobu prvků σ_{yy} a σ_{yz} tohoto tenzoru. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\sigma_{yy} = \eta \left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),$

$$\sigma_{yz} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_l^2} + \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \lambda \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_k \partial x_n}$$