Početní praktikum 2

4. jarní zápočtová písemka[1] doba řešení - 180 minut

1. Rozepište explicitně, případně pomocí Einsteinovy nebo vektorové symboliky, následující vektorovou identitu: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $A_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial B_i}{\partial x_i}+\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}\dfrac{\partial B_i}{\partial x_j}=\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)+\operatorname{tr}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{B}\right)$

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu:

   $\displaystyle\iint_S x^2yz\,\mathrm{d}S,\quad \text{kde}\quad S=\left\{x^2+y^2+z^2=R^2,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}.$ (2,5 bodu)

   Výsledek: $\dfrac{2}{15}R^6$

3. Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy:

   $S=\left\{x^2+y^2-z^2=0,\ \ z\in\langle 0,H\rangle\right\},$

   jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma=Az^3+Bz$, kde A,B jsou kladné konstanty. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T=0,\ y_T=0,\ z_T=\dfrac{5\left(2AH^3+3BH\right)}{4\left(3AH^2+5B\right)}$

4. Plášť vodojemu ve tvaru kužele, stojícího „špičkou“ dolů, o průměru horní vodorovné plochy $D=15\,\mathrm{m}$ a výšce $H=15\,\mathrm{m}$ je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle $2\times10^7\,\mathrm{N}$. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je přibližně na hranici konstrukční odolnosti? Pro vyčíslení uvažujte zaokrouhlené hodnoty konstant $\rho=1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g=10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, násobky π spočítejte přibližně. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

   Výsledek: $F_p\approx 2\times10^7\,\mathrm{N}$. Plášť vodojemu je dimenzován na hranici odolnosti.

5. Vypočítejte plošný integrál 2. druhu:

   $\displaystyle\iint_S (x,y,3)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$ kde S je rovinná plocha ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech $(1,0,1)$, $(1,2,2)$, $(5,2,2)$, $(5,0,1)$, ve směru normály $\vec{\nu}$ této plochy jejíž složka ν_y je kladně orientovaná. (2,5 bodu)

   Výsledek: -20

6. Vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x,y,z)=(0,0,z^2)$ uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa:

   $\mathcal{V}=\left\{(x,y,z)\middle|\,x^2+y^2+z^2\leq 4,\ x\leq 0,\ y\leq 0,\ z\leq 0,\ \dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\leq\dfrac{1}{4}\right\}.$ (2,5 bodu)

   Výsledek: $\Phi_F=-\dfrac{\pi}{2}$

7. Pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F}=\left(\dfrac{y^2}{2},xz,\dfrac{y^2}{2}\right)$ působící po obvodu plochy dané předpisem $S=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+(y-3)^2\leq 16,\ z=5\right\}$, po vykonání 1 okruhu z bodu $(0,-1,5)$ do stejného bodu, v matematicky záporném směru. (2,5 bodu)

   Výsledek: -32π

8. Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x,y)=\sqrt{x^3-y^2-6}$ v bodě $(2,1)$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $6x-y-10-30(x-2)^2+6(x-2)(y-1)-(y-1)^2$

[1] Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.

9. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = |\sin x| \cos x$, $x \in \langle -\pi, \pi)$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{4-k^2} \cos(kx)$

10. Zadané číslo $\sqrt[6]{-5 - \frac{5\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

Výsledek: $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{6}} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}\right)\right]$, $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{6}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}\right)}$, $k = 0, \ldots, 5$.

11. Imaginární část v holomorfní funkce $f(z)$ komplexní proměnné z má tvar $v = 2xy + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, kde x je $\mathrm{Re}(z)$, y je $\mathrm{Im}(z)$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce z. Určete hodnotu absolutního členu (integrační konstanty) funkce $f(z)$, pokud $f(1,0) = 1$. (2,5 bodu)

Výsledek: $f(z) = z^2 + \ln z + \mathrm{C}$, $\mathrm{C} = 0$.

12. Tenzor σ viskózního napětí lze zapsat formou

$$\sigma_{rs} = \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial x_r} + \frac{\partial v_m}{\partial x_r} \frac{\partial v_m}{\partial x_s} \right) + \lambda \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \delta_{rs},$$

kde v_i jsou složky vektoru rychlosti a η i λ jsou konstanty (koeficient dynamické viskozity, koeficient dilatační viskozity). Pomocí Einsteinovy symboliky napište výraz pro divergenci tohoto tenzoru. Napište rovněž explicitní podobu prvků σ_{yy} a σ_{yz} tohoto tenzoru. (2,5 bodu)

Výsledek: $\sigma_{yy} = \eta \left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 \right] + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),$

$$\sigma_{yz} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right],$$

$$\frac{\partial \sigma_{rs}}{\partial x_s} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial v_m}{\partial x_r} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_s^2} + \frac{\partial v_m}{\partial x_s} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_r \partial x_s} \right) + \lambda \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_r \partial x_n}.$$