

Počtení praktikum 2

1a. jarní zápočtová písemka¹

1. Dokažte platnost vektorové identity:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \quad (2,5 \text{ bodu})$$

Výsledek: Na obou stranách bude vektor

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right].$$

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu:

$$\iint_S \frac{x^2 - x}{\sqrt{5}} dS, \quad \text{kde } S = \{z^2 - 4(x^2 + y^2) = 0, z \in (0, 4)\}. \quad \text{Načrtněte zadanou plochu.} \quad (2,5 \text{ bodu})$$

Výsledek: 4π . Jde o kuželovou plochu s vrcholem v bodě $(0, 0, 0)$, jejíž osu tvoří kladná část osy z , s výškou $H = 4$ a s poloměrem podstavy $R = H/2 = 2$.

3. Vypočítejte polohu těžiště tělesa, ohraničeného plochou: $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \in (0, -1)\}$, jehož objemová hustota ρ je dána funkcí $\rho = \sqrt{|z|}$. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

Výsledek: $x_T = 0, y_T = 0, z_T = -\frac{7}{15}$, jde o polokouli se středem v bodě $(0, 0, 0)$, jejíž osu tvoří záporná část osy z , s poloměrem 1.

4. Nádoba ve tvaru koule je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou jako $p = \rho_0 g e^{h/2}$, kde ρ_0 je hustota kapaliny v nejvyšším bodě nádoby a h je hloubka daného místa v nádobě. Poloměr nádoby $R = 1$ m. Určete tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Pro vyčíslení uvažujte hodnoty konstant $\rho_0 = 500 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, násobky π a e spočítejte přibližně. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

Výsledek: $F_p \approx 100 \text{ kN}$.

¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.