# Početní praktikum 2

## 1. jarní zápočtová písemka[1]

1. Rozepište explicitně vektorovou identitu $\nabla^2 A^2$ ve 2D, kdy operátor nabla i vektor $\vec{A}$ jsou zobrazeními pouze v $\mathbb{R}^2$ (souřadnice $x$ a $y$). Výsledek bude obsahovat celkem 8 členů (případně 6 při zápisu pomocí 2D operátoru nabla). (2,5 bodu)

   Výsledek: $2\left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)^2 + A_x \nabla^2 A_x + A_y \nabla^2 A_y\right]$.

2. Vypočítejte plošný integrál $\iint_S (x^2 + y^2)\, z \,\mathrm{d}S$, kde $S = \left\{x^2 + y^2 - z = 0,\ z \in \langle 0, H\rangle\right\}$, $H$ je konstanta. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\frac{\pi}{420}\left[(4H+1)^{3/2}\left(30H^2 - 6H + 1\right) - 1\right]$, jde o paraboloid s vrcholem v bodě $(0, 0, 0)$, jehož osu tvoří kladná část osy $z$, s výškou $H$ a s poloměrem podstavy $R = \sqrt{H}$.

3. Vypočítejte moment setrvačnosti plochy $S = \left\{x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \in \langle 0, H\rangle\right\}$ s plošnou hustotou $\sigma = z^2$, rotující okolo osy $z$. Výsledek vyjádřete jako funkci hmotnosti dané plochy a rozměru $R = H$. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

   Výsledek: $J = \frac{2}{3} M R^2$, jde o kuželovou plochu s vrcholem v bodě $(0, 0, 0)$, jejíž osu tvoří kladná část osy $z$.

4. Nádoba ve tvaru koule je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou jako $p = \rho_0 g h^3$, kde $\rho_0$ je hustota kapaliny na hladině a $h$ je hloubka daného místa v nádobě. Poloměr nádoby $R = 2\,\mathrm{m}$. Určete přibližně tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Pro vyčíslení uvažujte hodnoty konstant $\rho_0 = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, násobky $\pi$ spočítejte přibližně. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

   Výsledek: $F_p = 8\pi\rho_0 g R^5 \approx 8 \times 10^6\,\mathrm{N}$.

---

[1] Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.