Početní praktikum 2

1. zápočtová písemka - jaro 2024

1. Dokažte platnost vektorové identity:

$$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{A}\right) = f\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + (\vec{\nabla} f) \times \vec{A},$$

kde f je libovolná skalární funkce a $\vec{A}$ je vektor. (2,5 bodu)

Výsledek: Na obou stranách bude následující vektor:
$$f\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}A_z - \frac{\partial f}{\partial z}A_y, \frac{\partial f}{\partial z}A_x - \frac{\partial f}{\partial x}A_z, \frac{\partial f}{\partial x}A_y - \frac{\partial f}{\partial y}A_x\right).$$

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\iint_S xz\,\mathrm{d}S, \text{ kde } S = \{x + y + z = 2,\, x \in \langle 0, 2\rangle \wedge y, z \geq 0\}\,.$$

Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{3}{2}\left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 1$, jde o rovinnou plochu, ohraničenou trojúhelníkem s vrcholy v bodech $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)$.

3. Určete polohu středu hmotnosti plochy:

$$S = \left\{x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \in \langle 0, 1\rangle\right\},$$

jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = x^2 + y^2 + z^2$. (2,5 bodu)

Výsledek: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = 4/5$, jde o kužel s vrcholem v bodě $(0, 0, 0)$ s výškou 1, jehož osu tvoří kladná část osy z.

4. Vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ plochou, danou předpisem:

$$z = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

(2,5 bodu)

Výsledek: $\Phi = \frac{32\pi}{3}$