Početní praktikum 2

3a. jarní zápočtová písemka

doba řešení - 60 minut

1. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = x|x|,\ x \in \langle -L, L)$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\dfrac{2L^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[(2-k^2\pi^2)(-1)^k - 2\right]}{k^3} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

2. Zadané číslo $\sqrt[3]{5 - \dfrac{15\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

   Výsledek: $10^{1/3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$, $\quad 10^{1/3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, alternativně:
   $10^{1/3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}-\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$, $\quad 10^{1/3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{9}-\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $\quad k = 0, 1, 2.$

3. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek ověřte, jestli funkce $f(z) = \exp\left(-\mathrm{i}z^2\right)$, $z \in \mathbb{C}$, může anebo nemůže být holomorfní na otevřených podmnožinách komplexní roviny $\mathbb{C}$. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{2xy}\left[x\,\sin\left(y^2-x^2\right) + y\,\cos\left(y^2-x^2\right)\right],$
   $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2\mathrm{e}^{2xy}\left[x\,\cos\left(y^2-x^2\right) - y\,\sin\left(y^2-x^2\right)\right],$
   Cauchy-Riemannovy podmínky jsou splněny.

4. Tzv. tenzor napětí T_{ij} lze zapsat formou

   $$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

   kde v_i, v_j jsou složky vektoru rychlosti, p je skalární tlak a η je konstanta (koeficient dynamické viskozity). Napište explicitní podobu tohoto tenzoru i jeho divergence (v kartézské soustavě), divergenci zapište také pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky. (2,5 bodu)

   Výsledek: $\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta\left[\Delta v_x + \dfrac{\partial}{\partial x}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right]$ (1. složka),
   $-\dfrac{\partial p}{\partial y} + \eta\left[\Delta v_y + \dfrac{\partial}{\partial y}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right]$ (2. složka),
   $-\dfrac{\partial p}{\partial z} + \eta\left[\Delta v_z + \dfrac{\partial}{\partial z}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right]$ (3. složka),
   $\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \eta\left(\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \dfrac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ (Einsteinova notace),
   $\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} = -\vec{\nabla}p + \eta\left[\Delta\vec{v} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot v)\right]$ (vektorový zápis).