

Počtení praktikum 2

3b. jarní zápočtová písemka

doba řešení - 60 minut

1. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = \frac{|x^3|}{x}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \frac{2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2 - k^2\pi^2)(-1)^k - 2]}{k^3} \sin(k\pi x)$$

2. Zadané číslo $\sqrt[3]{-5 + \frac{5i}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^{1/3} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], \quad \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^{1/3} e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

3. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek ověřte, jestli funkce $f(z) = \exp\left[-\frac{(z+1)^2}{i}\right]$, $z \in \mathbb{C}$, může být holomorfní na otevřených podmnožinách komplexní roviny \mathbb{C} . (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{-(2xy+2y)} [(2x+2) \sin(x^2 - y^2 + 2x + 1) + y \cos(x^2 - y^2 + 2x + 1)],$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{-(2xy+2y)} [(2x+2) \cos(x^2 - y^2 + 2x + 1) - y \sin(x^2 - y^2 + 2x + 1)],$$

C.-R. podmínky jsou splněny.

4. Tzv. tenzor viskózního (stříhového) napětí σ_{ij} lze zapsat formou

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

kde v_i, v_j, v_k jsou složky vektoru rychlosti, η a λ jsou konstanty (koeficient dynamické viskozity, koeficient dilatační viskozity). Napište explicitní podobu tohoto tenzoru i jeho divergence v kartézské soustavě, divergenci zapište také Einsteinovou a vektorovou symbolikou. (2,5 bodu)

$$\text{Výsledek: } \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \eta \Delta v_x + (\eta + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (1. \text{ složka}),$$
$$\eta \Delta v_y + (\eta + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (2. \text{ složka}),$$
$$\eta \Delta v_z + (\eta + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (3. \text{ složka}),$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + (\eta + \lambda) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{Einsteinova notace}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (\text{vektorový zápis}).$$