

ZMMF 3: úloha 5

Úlohu odevzdejte nejpozději do konce zkouškového období pro podzimní semestr 2025

1) Vypracujte numerické řešení tzv. Lane-Emdenovy rovnice stupně $n = 1.58$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + y^{1.58} = 0, \quad (1)$$

s okrajovými podmínkami $y(0) = 3$, $y'(0) = 0.6$ (kde $y' = \partial y / \partial x$), metodou **Runge-Kutta 4. řádu** (RK4), pro $x \in (0, D > 0)$, kdy $y(x < D) > 0$, $y(x = D) = 0$ a $\Delta x = 10^{-3}$ (hodnota “výpočetního kroku” na x -ové ose). Jako nejmenší hodnotu x ve výpočetní oblasti nezačínáte nulu nýbrž Δx , vzhledem k tomu, že v prostředním členu rovnice se x nachází ve jmenovateli.

V předběžných výpočtech se vám pro oblast $x > D$ (pravděpodobně) vypíší vypočítané hodnoty y jako NaN (not a number); to je způsobené tím, že by zde reálná funkční hodnota y klesla do “záporných čísel”, což vzhledem k racionální mocnině y pravděpodobně nemůže. Protože počítaná funkce y ve “fyzikální realitě” většinou vyjadřuje nezáporné stavové veličiny jako je hustota, tlak a teplota, řešení je tak v pořádku. **Vykreslete** jeho graf v oblasti, kde $y \geq 0$.

2) Vypracujte numerické řešení nelineární parciální diferenciální, tzv. Burgersovy rovnice,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

kde u je rychlost advekce tekutiny (tato pohybová rovnice je částí jednorozměrného Navier-Stokesova řešení bez silových účinků), pro $t \in \langle 0, 300 \rangle$ a $x \in \langle 0, 300 \rangle$ (zde zahrňte i bod $x = 0$ do výpočetní oblasti). Prostorový krok zvolte jako $\Delta x \leq 1$, časový krok Δt vyplýne z tzv. **Courantovy podmínky**, kterou zadejte jako $\text{cfl} = 0.4$. Implementujte tzv. **upwind schéma**. Počáteční profil uvažujte jako

$$u(0, x) = \frac{1}{2} e^{-3x^2} \quad (3)$$

a okrajové podmínky zadejte následující: $u(t, 0) = u(0, 0) = u_0$ (“fixní”, tzv. vtoková neboli *inflow* podmínka, v souladu s rovnicí (3)), kdežto $u(t, 300)$ zvolte jako tzv. volnou (*outflow*) podmínku s *lineární* extrapolací (kdy rozdíl mezi $u(t, 300)$ a u pro nejbližší sousední x -ovou hodnotu sítě je stejný jako rozdíl u pro toto a ještě následující x). **Vykreslete** pomocí vhodného programu (Gnuplot, Matplotlib, atd.) průběh řešení během zadaného časového intervalu.

K vypracování úlohy použijte libovolný programovací jazyk.