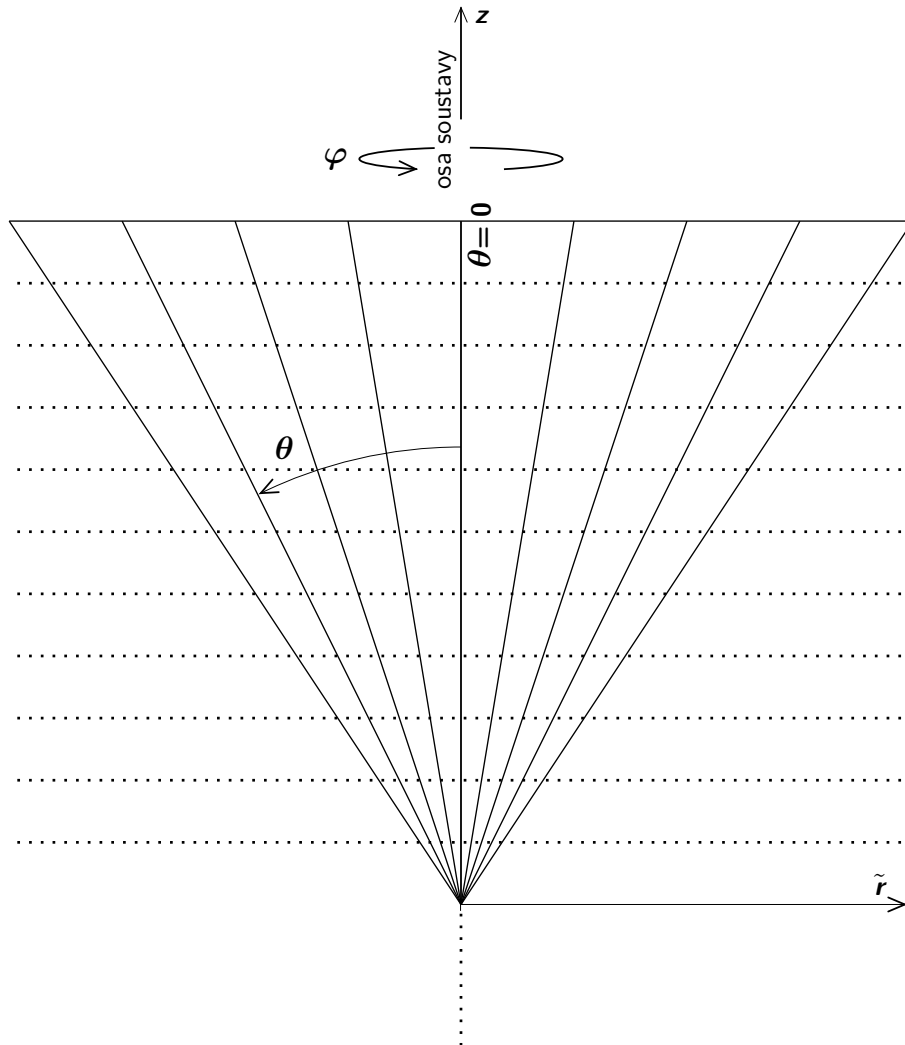


Příkladem neortogonální souřadnicové soustavy může být „kuželová“ soustava (záměrně zde dávám název do uvozovek, protože standardní tzv. kónická soustava je ortogonální a je zavedená jiným způsobem). Souřadnicové směry takto zadané „kuželové“ soustavy, kolmé k souřadnicovým plochám s příslušnou konstantní souřadnicí, jsou: vertikální souřadnice $z \in \langle 0, \infty \rangle$, azimutální úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a polární úhel (odchylka od vertikální osy) $\theta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, viz obr. 1:



Obrázek 1: Znázornění „kuželového“ souřadného systému, definovaného souřadnicemi z , φ a θ , kde z je vertikální výška vzhledem k počátku, φ je azimutální úhel a θ je úhlová odchylka od osy z . Uvedená vodorovná souřadnice $\tilde{r}$ značí vzdálenost od osy z , odpovídá tedy válcové radiální souřadnici.

Zavedme také pro přehledné označení souřadnicových křivek následující označení: souřadnice v (kde $\phi, \theta = \text{konst.}$), ϕ (kde $z, \theta = \text{konst.}$) a u (kde $z, \phi = \text{konst.}$). Vzhledem k ne-ortogonalitě tohoto systému je nutné zohlednit vzájemnou závislost směrů u a v , kdy $u = u(v)$ a naopak. Uvedené dvě třídy souřadnic naznačují dvě možné báze v této soustavě (viz dále; v ortogonálních soustavách by obě takové báze splynuly do jedné identické).

1) Napište transformační rovnice z kartézské do „kuželové“ soustavy ve třech modifikacích

$$x, y, z \mapsto z, \phi, \theta$$

$$x, y, z \mapsto v(u), \phi,$$

$$x, y, z \mapsto \phi, u(v),$$

a rovnice odpovídajících zpětných transformací. Odvoďte vztah pro objem kužele s poloměrem podstavy R a výšce H a pro velikost plochy jeho pláště v „kuželových“ souřadnicích z, ϕ, θ . Výsledky porovnejte se „známými“ vztahy $V = \pi R^2 H/3$ a $S = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$.

2) Napište metrické tenzory g_{ij} a g^{ij} (kovariantní a kontravariantní báze) této soustavy v pořadí směrů z, ϕ, θ . Odvoďte celý postup sestavení metrické formy této soustavy a následně metrických tenzorů, nejen výsledek (ten potom můžete ověřit v rámci bodu 5).

3) Odvoďte explicitní podobu jednotkových vektorů báze $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, kolmých k souřadnicovým plochám a jednotkových vektorů báze $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{u}}$, tečných k souřadnicovým křivkám (můžete je vyjádřit jako funkce úhlů ϕ a θ i když zde θ nefiguruje jako souřadnice). Napište také explicitní podobu operátoru gradientu $\vec{\nabla}$ v bázi $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Bonusová úloha: Odvoďte také podobu divergence obecného vektoru $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ v bázi $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ (mějte stále na paměti, že některé vektory „kuželové“ báze nejsou vzájemně ortogonální).

4) Napište explicitní podobu polohového vektoru $\vec{r}$, vektoru rychlosti $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ a vektoru zrychlení $\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}}$ v bázi $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

5) Nalezněte všechny nenulové Christoffelovy symboly a napište explicitní podobu Riemannova a Ricciho tenzoru této soustavy v bázi $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ (vysvětlující text k těmto pojmům - viz učební text [Praktické početní metody pro fyziky](#), poslední odstavec - Tenzory v zakřiveném prostoročase). Označte jednotlivé (nenulové) symboly a členy tenzorů všemi odpovídajícími indexy. K výpočtu použijte balíček Sympy; příkládám dále vzor obdobného výpočetního skriptu pro příslušné symboly a tenzory v případě 2D sféry. **Upozornění** - i když je ve skriptu požadováno “simplify”, program často výsledné členy v tenzorech neupraví do nejjednodušší podoby, v tom případě překontrolujte tyto členy a maximálně je zjednodušte (týká se zejména Ricciho tenzoru)!

Příklad pythonovského skriptu pro výpočet metrického tenzoru, Christoffelových symbolů, Riemannova a Ricciho tenzoru na 2D sféře - balíček "diffgeom":

```
1 import sympy
2
3 from sympy.diffgeom import *
4 from sympy import simplify, init_printing
5 init_printing(use_unicode=True)
6 #from sympy.physics.units.systems.cgs import cgs_gauss
7
8 from sympy.core.symbol import (Dummy, symbols)
9 from sympy.functions.elementary.miscellaneous import sqrt
10 from sympy.functions.elementary.trigonometric import (acos, atan2, cos, sin)
11 from sympy import pprint, exp, Function
12 from sympy.diffgeom import Manifold, Patch, CoordSystem
13 m = Manifold('sphere', 2)
14 patch = Patch('origin', m)
15 cs = CoordSystem('sphere', patch, symbols('theta', 'phi', real=True))
16
17 from sympy.diffgeom import twoform_to_matrix, TensorProduct, metric_to_Christoffel_1st,
18     metric_to_Christoffel_2nd, metric_to_Riemann_components, metric_to_Ricci_components
19 TP = TensorProduct
20 x = symbols('x')
21 y = symbols('y')
22 r = symbols('r')
23 theta = symbols('theta')
24 phi = symbols('phi')
25
26 theta, phi = cs.coord_functions()
27 dtheta, dphi = cs.base_oneforms()
28
29 metric = r**2*TP(dtheta, dtheta) + 0 + 0 + r**2*sin(theta)**2*TP(dphi, dphi)
30 #in case of a diagonal metrics it is not necessary to write the non-diagonal zero components;
31 #while in case of a non-diagonal metrics, it is necessary to explicitly list them (in line order)!!
32
33 matsphere = twoform_to_matrix(metric)
34 matsphere = simplify(matsphere)
35 print()
36 print("Covariant metric tensor:")
37 print()
38 pprint(matsphere)
39
40 invmatsphere = matsphere.inv('CH')
41 invmatsphere = simplify(invmatsphere)
42 print()
43 print("Contravariant metric tensor:")
44 print()
45 pprint(invmatsphere)
46
47 riemann = metric_to_Riemann_components(metric)
48 riemann = simplify(riemann)
49
50 ricci = metric_to_Ricci_components(metric)
51 ricci = simplify(ricci)
52
53 ch_2nd = metric_to_Christoffel_2nd(metric)
54 ch_2nd = simplify(ch_2nd)
55
56 print()
57 print("Christoffel symbols of 2nd kind:")
58 print()
59 pprint(ch_2nd)
60 print()
61 print("Riemann tensor:")
62 print()
63 pprint(riemann)
64 print()
65 print("Ricci tensor:")
66 print()
67 pprint(ricci)
```