

ZMMF 3: úloha 2

Úlohu odevzdejte do 31. října 2025

1) Je dána funkce $F(\omega) = \frac{a - i\omega}{(a - i\omega)^2 - b^2}$. Určete podmnožinu Gaussovy roviny, v níž je zadaná funkce jednostranným Laplaceovým obrazem jistého předmětu, a vypočtěte tento předmět.

2) Užitím Laplaceovy transformace řešte obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s nekonečnými koeficienty

$$ty'' - (t + 1)y' + y = 4t^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

3) Nalezněte Fourierův obraz funkce polohy tlumeného oscilátoru

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \theta_0(t),$$

kde $\gamma > 0$ je konstanta útlumu, $\omega_0 > 0$ je konstantní úhlová frekvence a $\theta_0(t)$ je Heavisideova funkce definovaná jako

$$\theta_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ 1 & \text{pro } t > 0. \end{cases}$$

4) Nalezněte Fourierův obraz konvoluce dvou následujících funkcí:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t + \phi), \\ g(t) = \frac{1}{2},$$

pro $t \in (-\infty, \infty)$, kde ω_0 je konstantní úhlová frekvence a ϕ je libovolný konstantní fázový posun.

Řešení rozepište podrobně, včetně explicitního vyjádření dílčích operací, například výpočtu nevlastních limit, a podobně.

(Pravidla pro počítání Laplaceovy a Fourierovy transformace naleznete ve skriptech, zejména v pdf verzi “Početní praktikum”, v příslušných kapitolách.)