

1) Neviskózní Burgersova rovnice je speciální případ nelineární vlnové rovnice, kdy rychlost šíření vlny je daná jako $u(t, x)$. Řešte tuto rovnici s pravou stranou a počáteční podmínkou,

$$a \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = t \cos t, \quad u(0, x) = \eta x - \xi,$$

kde a, η, ξ jsou konstanty a ověřte správnost výsledku.

2) Fourierovou metodou řešte homogenní vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde a je kladná konstanta, s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a počátečními funkcemi

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{pro } t > 0, \quad u(0, x) = x, \quad u_t(0, x) = 0,$$

a ověřte správnost výsledku.

3) Obecná rovnice difúze v $\mathbb{R}^3$ je daná následovně,

$$\frac{\partial u(t, x, y, z)}{\partial t} = D \nabla^2 u(t, x, y, z),$$

kde D je difúzní koeficient (obecně nekonstantní, zde ho považujeme za konstantu). Fourierovou metodou vyřešte následující parciální diferenciální rovnici v 1D (nehomogenní, tedy se „zdrojovou“ funkcí difúze), která má následující tvar,

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = a e^{-t},$$

kde a je kladná konstanta, s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a homogenní počáteční podmínkou,

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{pro } t > 0, \quad u(0, x) = 0$$

a ověřte správnost výsledku.

4) Řešte následující 2D Poissonovu rovnici se smíšenými okrajovými podmínkami,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 6x + 2y + 2, \quad u(0, y) = y^2, \quad u_x(0, y) = y.$$