Řešený příklad 9.5 f) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\operatorname{arctg} x)+1-\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1}$$

1) Můžeme si například „předpočítat“ rozvoj logaritmické funkce, kde substituujeme

$$x\operatorname{arctg} x = u.$$

Pokud nic nebrání rozvíjet funkci v bodě 0 (zde je to navíc dáno i limitou), je to nejjednodušší, někdy, například u lomené funkce $1/x$ to nelze, pak je nejjednodušší to rozvíjet v bodě 1. Rozvoj logaritmické funkce v bodě 0 potom bude

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= 0+\left.\frac{\partial[\ln(1+u)]}{\partial u}\right|_{u=0} u+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2[\ln(1+u)]}{\partial u^2}\right|_{u=0} u^2+\ldots = \\ &= u-\frac{u^2}{2}+\ldots \end{aligned}$$

2) Rozvineme samostatně funkci $\operatorname{arctg} x$, opět v bodě 0:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= 0+\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} x-\frac{1}{2!}\left.\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right|_{x=0} x^2-\frac{1}{3!}\left.\left[\frac{2}{(1+x^2)^2}-\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}\right]\right|_{x=0} x^3+\ldots \\ &= x-\frac{x^3}{3}+\ldots, \end{aligned}$$

po dosazení za u (nesmíme zapomenout rozvinutou funkci $\operatorname{arctg} x$ ještě vynásobit x) dostaneme

$$\ln(1+x\operatorname{arctg} x) = x^2-\frac{x^4}{3}+\ldots-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}+\ldots\right)^2+\ldots = x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{2}+\ldots = x^2-\frac{5x^4}{6}+\ldots$$

3) Obdobně můžeme zacházet i s ostatními funkcemi:

$$\begin{aligned} &1-\mathrm{e}^{x^2} \quad (\text{kde } x^2=z) \quad = 1-\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots\right) = -x^2-\frac{x^4}{2}-\ldots, \\ &\sqrt{1+2x^4}-1 \quad (\text{kde } 2x^4=t) \quad = \left(1+\left.\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\right|_{t=0} t-\frac{1}{2!}\left.\frac{1}{4(1+t)^{3/2}}\right|_{t=0} t^2+\ldots\right)-1 = \\ &= x^4-\frac{x^8}{2}+\ldots \end{aligned}$$

4) Dosadíme všechny dílčí rozvoje do zadaného výrazu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x\operatorname{arctg} x)+1-\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\frac{5x^4}{6}+\ldots-x^2-\frac{x^4}{2}+\ldots}{x^4-\ldots} =$$

(kde všechny neuvedené výrazy, symbolizované tečkami, obsahují vyšší mocniny x než čtvrtou, takže po úpravě dostáváme)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left[\left(-\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)+\ldots\right]}{x^4(1-\ldots)} = \frac{-\frac{4}{3}+\ldots\Big|_{x=0}}{1-\ldots\Big|_{x=0}} = -\frac{4}{3}.$$