

Stručný úvod do parciálních diferenciálních rovnic

1 Burgersova rovnice

Neviskózní Burgersova rovnice je speciální případ nelineární vlnové rovnice, kdy rychlost šíření vlny je daná jako $c(t, x) = u(t, x)$. Řešte tuto parciální diferenciální rovnici s pravou stranou, ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \cos t,$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, x) = \alpha x + \beta.$$

1.1 Úlohy k řešení

1. Klasifikujte Burgersovu rovnici podle klasifikace PDR (PDE).
2. Nalezněte řešení rovnice s výše zadanou počáteční podmínkou a ověřte jeho správnost.
3. Napište řešení rovnice s hodnotami $\alpha = 1$ a $\beta = 1$.
4. **Bonusová úloha:** Vyneste řešení pro výše uvedené parametry do grafu.

2 Jednorozměrná vlnová rovnice - struna upevněná na koncích

Uvažujte rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

s následujícími homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami,

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{pro } t > 0 \quad (2)$$

a počátečními funkcemi

$$u(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x). \quad (3)$$

$$(4)$$

2.1 Úlohy k řešení

1. Klasifikujte výše uvedenou rovnici s ohledem na klasifikaci PDR.
2. Fourierovou metodou nalezněte řešení rovnice s danými obecnými podmínkami.
3. **Bonusová úloha:** Ukažte, čemu se rovná řešení $u(t, x)$, pokud $f(x) = x$ a $g(x) = 0$.

3 Difúzní rovnice

S difúzí se setkáváme každodenně, ať je to difúze tepla, difúze plynu v komoře (tzv. druhý Fickův zákon) anebo difúze atomů v pevné látce. Proto je důležité rozumět řešení této rovnice a umět odhadnout, co se stane při zadání různých okrajových a počátečních podmínek. Obecná rovnice difúze v $\mathbb{R}^3$ je daná následovně,

$$\frac{\partial u(t, x, y, z)}{\partial t} = D \nabla^2 u(t, x, y, z), \quad (5)$$

kde D je difúzní koeficient (obecně nekonstantní, zde ho považujeme za konstantu). Vyřešte následující parciální diferenciální rovnici v 1D (nehomogenní, tedy se zdrojem difúze), která má následující tvar,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = tx^2, \quad (6)$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a homogenní počáteční podmínkou,

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{pro } t > 0, \quad u(0,x) = 0. \quad (7)$$

3.1 Úlohy k řešení

1. Klasifikujte výše uvedenou rovnici podle klasifikace PDR.
2. Fourierovou metodou nalezněte řešení rovnice s danými okrajovými podmínkami.
3. **Bonusová úloha:** Ověřte výsledné řešení rovnice.

4 Bonusová úloha: Poissonova rovnice s pravou stranou

Řešte následující Poissonovu rovnici

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 6x, \quad (8)$$

se smíšenými okrajovými podmínkami ve tvaru

$$u(0,y) = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = y.$$

4.1 Úlohy k řešení

1. Klasifikujte výše uvedenou rovnici podle klasifikace PDR.
2. Nalezněte řešení rovnice s danými okrajovými podmínkami.