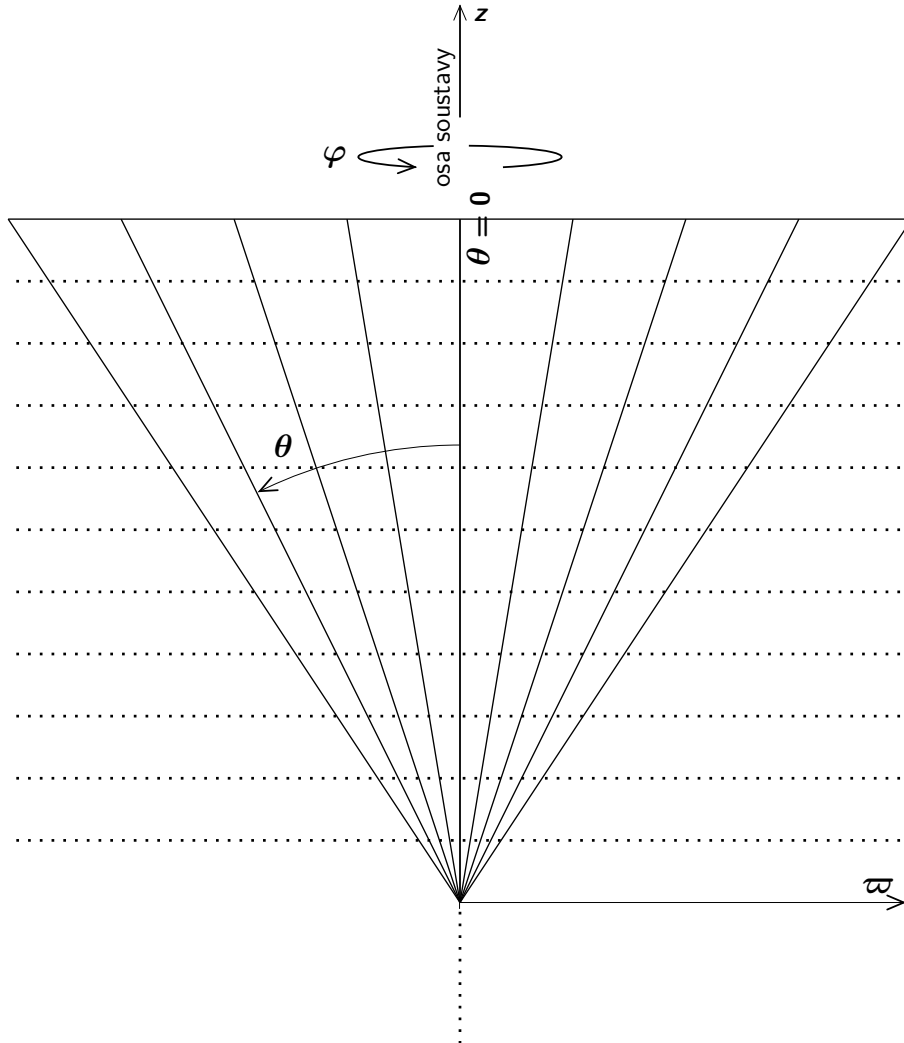


Příkladem neortogonální souřadnicové soustavy může být „kuželová“ soustava (záměrně zde dávám název do uvozovek, protože standardní tzv. kónická soustava je ortogonální a je zavedená jiným způsobem). Souřadnicové směry takto zadané „kuželové“ soustavy jsou: $z \in \langle 0, \infty \rangle$ - vertikální souřadnice, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ - azimutální úhel, $\theta \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ - polární úhel, viz obrázek 1:



Obrázek 1: Znázornění „kuželového“ souřadnicového systému, definovaného souřadnicemi z , φ a θ , kde z je vertikální vzdálenost od počátku, φ je azimutální úhel a θ je úhlová odchylka od osy z . Uvedená souřadnice w značí vzdálenost od osy z , odpovídá tedy válcové radiální souřadnici.

- 1) Odvoďte vztah pro objem kužele s poloměrem podstavy R a výšce H a pro velikost plochy jeho pláště v těchto souřadnicích. Výsledky porovnejte se „známými“ vztahy $V = \pi R^2 H / 3$ a $S = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$.
- 2) Napište metrické tenzory g_{ij} a g^{ij} (kovariantní a kontravariantní báze) této soustavy. Odvoďte celý postup sestavení metrické formy této soustavy a následně metrických tenzorů, nejen výsledek (ten potom můžete ověřit v rámci bodu 5).
- 3) Odvoďte explicitní podobu operátoru gradientu $\vec{\nabla}$ v této soustavě.
- 4) Napište explicitní podobu polohového vektoru $\vec{r}$ a vektoru rychlosti $\vec{v}$ v této soustavě.

5) Nalezněte všechny nenulové Christoffelovy symboly a napište explicitní podobu Riemannova a Ricciho tenzoru této soustavy (vysvětlující text k těmto pojmům - viz učební text [Praktické početní metody pro fyziky](#), poslední odstavec - Tenzory v zakřiveném prostoročase). Označte jednotlivé (nenulové) symboly a členy tenzorů všemi odpovídajícími indexy. K výpočtu použijte balíček Sympy; přikládám dále vzor obdobného výpočetního skriptu pro příslušné symboly a tenzory v případě 2D sféry. **Upozornění** - i když je ve skriptu požadováno “simplify”, program často výsledné členy v tenzorech neupraví do nejjednodušší podoby, v tom případě překontrolujte tyto členy a maximálně je zjednodušte (týká se zejména Ricciho tenzoru)!

Příklad pythonovského skriptu pro výpočet metrického tenzoru, Christoffelových symbolů, Riemannova a Ricciho tenzoru na 2D sféře - balíček "diffgeom":

```
1 import sympy
2
3 from sympy.diffgeom import *
4 from sympy import simplify, init_printing
5 init_printing(use_unicode=True)
6 #from sympy.physics.units.systems.cgs import cgs_gauss
7
8 from sympy.core.symbol import (Dummy, symbols)
9 from sympy.functions.elementary.miscellaneous import sqrt
10 from sympy.functions.elementary.trigonometric import (acos, atan2, cos, sin)
11 from sympy import pprint, exp, Function
12 from sympy.diffgeom import Manifold, Patch, CoordSystem
13 m = Manifold('sphere', 2)
14 patch = Patch('origin', m)
15 cs = CoordSystem('sphere', patch, symbols('theta', 'phi', real=True))
16
17 from sympy.diffgeom import twoform_to_matrix, TensorProduct, metric_to_Christoffel_1st,
18     metric_to_Christoffel_2nd, metric_to_Riemann_components, metric_to_Ricci_components
19 TP = TensorProduct
20 x = symbols('x')
21 y = symbols('y')
22 r = symbols('r')
23 theta = symbols('theta')
24 phi = symbols('phi')
25
26 theta, phi = cs.coord_functions()
27 dtheta, dphi = cs.base_oneforms()
28
29 metric = r**2*TP(dtheta, dtheta) + 0 + 0 + r**2*sin(theta)**2*TP(dphi, dphi)
30 #in case of a diagonal metrics it is not necessary to write the non-diagonal zero components;
31 #while in case of a non-diagonal metrics, it is necessary to explicitly list them (in line order)!!
32
33 matsphere = twoform_to_matrix(metric)
34 matsphere = simplify(matsphere)
35 print()
36 print("Covariant metric tensor:")
37 print()
38 pprint(matsphere)
39
40 invmatsphere = matsphere.inv('CH')
41 invmatsphere = simplify(invmatsphere)
42 print()
43 print("Contravariant metric tensor:")
44 print()
45 pprint(invmatsphere)
46
47 riemann = metric_to_Riemann_components(metric)
48 riemann = simplify(riemann)
49
50 ricci = metric_to_Ricci_components(metric)
51 ricci = simplify(ricci)
52
53 ch_2nd = metric_to_Christoffel_2nd(metric)
54 ch_2nd = simplify(ch_2nd)
55
56 print()
57 print("Christoffel symbols of 2nd kind:")
58 print()
59 pprint(ch_2nd)
60 print()
61 print("Riemann tensor:")
62 print()
63 pprint(riemann)
64 print()
65 print("Ricci tensor:")
66 print()
67 pprint(ricci)
```