Porovnání dvou variant integrace jednoduché úlohy z příkladu 1.115 ze stránky
https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js17/pocetni__praktikum1/web/ch01__s04.html
(vysvětlující fyzikální popis - viz příklad 1.114) :

Element náboje tyče lze zapsat jako

$$\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

kde τ je homogení jednorozměrná (délková) nábojová hustota a dx je délkový element tyče, orientované podél osy x. Elektrostatický potenciál v bodě P v kolmé vzdálenosti D od konce tyče, buzený tímto nábojovým elementem, lze zapsat jako

$$\mathrm{d}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\tau\,\mathrm{d}x}{\sqrt{D^2+x^2}}, \tag{2}$$

celkový potenciál v tomto bodě tak bude

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{D^2+x^2}}, \tag{3}$$

kde L je celková délka tyče. Jednoduchou substitucí $x = yD$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\,D$ dostáváme

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{L/D} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} \tag{4}$$

a následnou substitucí $y = \mathrm{tg}\,z$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z/\cos^2 z$ dostaneme

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{\mathrm{arctg}\,(L/D)} \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}. \tag{5}$$

Pro následující postup můžeme zvolit některou ze dvou následujících možností:

1. rozšířením zlomku v integrandu výrazem $\cos z$ dostaneme

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{\mathrm{arctg}\,(L/D)} \frac{\cos z\,\mathrm{d}z}{\cos^2 z} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{\mathrm{arctg}\,(L/D)} \frac{\cos z\,\mathrm{d}z}{1-\sin^2 z}, \tag{6}$$

substitucí $\sin z = t$, $\cos z\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$ přejdeme na

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{\sin\,[\mathrm{arctg}\,(L/D)]} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)} = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{\sin\,[\mathrm{arctg}\,(L/D)]} \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\sin\,[\mathrm{arctg}\,(L/D)]},\end{aligned} \tag{7}$$

kde pomocí jednoduché geometrické rozvahy můžeme horní integrační mez přepsat jako

$$\sin\,[\mathrm{arctg}\,(L/D)] = \frac{L}{\sqrt{L^2+D^2}}. \tag{8}$$

Dosazením takto vyjádřených mezí dostáváme

$$\phi = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0}\ln\left|\frac{1+\dfrac{L}{\sqrt{L^2+D^2}}}{1-\dfrac{L}{\sqrt{L^2+D^2}}}\right| = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0}\ln\left|\frac{\sqrt{L^2+D^2}+L}{\sqrt{L^2+D^2}-L}\right| = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{L^2+D^2}+L}{D}\right)^2$$
$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{L^2+D^2}+L}{D}\right), \tag{9}$$

kde předposlední výraz dostaneme rozšířením zlomku v argumentu logaritmu v předchozím členu jeho čitatelem.

2. Takzvanou univerzální substitucí $\mathrm{tg}\,(z/2) = t$, z níž jednoduchými geometrickými rozvahami s využitím goniometrických výrazů pro dvojnásobné argumenty odvodíme

$$\sin z = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}z = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}. \tag{10}$$

Po dosazení rovnice (5) přejde na

$$\phi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0}\int\limits_0^{\mathrm{tg}\left[\frac{\mathrm{arctg}\,(L/D)}{2}\right]} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_0^{\mathrm{tg}\left[\frac{\mathrm{arctg}\,(L/D)}{2}\right]}, \tag{11}$$

kde ovšem poloviční argument tangenty v horní mezi představuje větší komplikaci než sinus obdobného argumentu v předchozím řešení. Tu vyřešíme tak, že tangens v horní mezi přepíšeme jako sinus/kosinus, rozšíříme kosinem daného výrazu a použijeme goniometrické vztahy pro dvojnásobný argument sinu a druhou mocninu kosinu,

$$\mathrm{tg}\left[\frac{\mathrm{arctg}\,(L/D)}{2}\right] = \frac{\sin\left[\frac{\mathrm{arctg}\,(L/D)}{2}\right]\cos\left[\frac{\mathrm{arctg}\,(L/D)}{2}\right]}{\cos^2\left[\frac{\mathrm{arctg}\,(L/D)}{2}\right]} = \frac{\sin\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]}{1+\cos\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]}. \tag{12}$$

Dosazením do rovnice (11) dostaneme výraz

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\ln\left|\frac{1+\sin\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]+\cos\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]}{1-(\sin\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]-\cos\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right])}\right|, \tag{13}$$

jehož argument rozšíříme pomocí $1+\sin\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]-\cos\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]$. Snadnými úpravami pak dostáváme

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\ln\left|\frac{1+\sin\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]}{\cos\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right]}\right|. \tag{14}$$

Pomocí rovnice (8) a analogického vztahu

$$\cos\left[\mathrm{arctg}\,(L/D)\right] = \frac{D}{\sqrt{L^2+D^2}}. \tag{15}$$

můžeme rovnici (14) upravit jako

$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{1+\dfrac{L}{\sqrt{L^2+D^2}}}{\dfrac{D}{\sqrt{L^2+D^2}}}\right) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{L^2+D^2}+L}{D}\right), \tag{16}$$

dostáváme tedy (očekávatelně) identické řešení k rovnici (9). Řešení pomocí univerzální substituce je ovšem v tomto případě zjevně pracnější a zdlouhavější.