1 Hledání primitivních funkcí

1.1 Základní pravidla

$$\int x^a \,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

$$\int x^{-1} \,\mathrm{d}\,x = \ln|x|$$

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\,x = e^x$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}\,x = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}\,x = \sin x$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}\,x = -\cos x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg} x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+c}} = \ln|x + \sqrt{x^2+c}|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}\,x = \ln|f(x)|$$

1.2 Per Partes

Protože $(fg)' = f'g + g'f$ tak také $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x + \int g'(x)f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int (f(x)g(x))'\mathrm{d}\,x = f(x)g(x)$. Z toho plyne základní vzorec pro integrování per partes:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Příklad:

$$\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}\,x = \dots$$

$$u'(x) = \mathrm{e}^{2x}, v(x) = x \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}, v'(x) = 1$$

$$\dots = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}(2x-1)$$

1.3 Substituční metoda

V integrálu $\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}\,x$ položíme $g(x) = t$. Pak $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = g'(x)$ a tedy $g'(x)\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t$. Takto se integrál převede na tvar $\int f(t)\mathrm{d}\,t$

Příklad 1.:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}\,x = \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}\,x = \dots$$

Tedy položíme $f(t) = t^2, g(x) = \tan x = t$
$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$. A tedy $\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t$

$$\dots = \int t^2 \mathrm{d}\,t = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}\tan^3 x$$

Příklad 2.:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x \ln x} = \dots$$

Položíme $\ln x = t$ a $\frac{1}{x}\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t$ a máme

$$\dots = \int \frac{\mathrm{d}\,t}{t} = \ln|t| = \ln|\ln|x||$$

Substituční metodu lze použít i opačným směrem, tzn. integrál $\int f(x)\mathrm{d}\,x$ upravit pomocí substituce $x = g(t)$ na tvar $\int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}\,t$.

Příklad 3.:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}\,x = \dots$$

Tedy $x = g(t) = \sin t$, $\mathrm{d}\,x = \cos t \mathrm{d}\,t$.

$$\dots = \int \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t \mathrm{d}\,t = \int \cos^2 t \mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)$$

To ještě můžeme upravit zpátky na

$$\dots = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) = \frac{1}{2}(t + \sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}) = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2})$$

Příklad 4.:

$$\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x = \dots$$

Subs. $x = t^2$, $\mathrm{d}\,x = 2t\mathrm{d}\,t$

$$\dots = 2\int t \arctan t\,\mathrm{d}\,t = 2(\frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}\,t) = t^2\arctan t - \int (1 - \frac{1}{t^2+1})\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= t^2 \arctan t - t + \arctan t = x \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x}$$