**1. Domácí úloha**
Ukažte, že nemůže nastat proces, při kterém volný elektron pohltí foton.
*Hint: Napište si relativistické zákony zachování pro srážku částic a podívejte se na řešitelnost rovnic za předpokladu že některé z částic mají nulovou klidovou hmotnost. Viz také Comptonův rozptyl*

---

**2. Domácí úloha**
Operátor průmětu spinu do osy $x$ resp. $y, z$ pro částici se spinem 1/2 je reprezentován tzv. Pauliho maticemi $S_x, S_y, S_z$:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Komutátor $[A, B]$ dvou matic $A, B$ je definován takto

$$[A, B] = AB - BA.$$

Exponenciálu z matice definujeme následovně:

$$\exp(A) = \mathbf{1} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

- Ukažte, že $[S_i, S_j] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$, tedy $[S_x, S_y] = \mathrm{i}\hbar S_z$, $[S_x, S_z] = -\mathrm{i}\hbar S_y$ atd.
- Ukažte, že

$$\exp(\mathrm{i}\phi S_x) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\hbar\phi}{2} & \mathrm{i}\sin\frac{\hbar\phi}{2} \\ \mathrm{i}\sin\frac{\hbar\phi}{2} & \cos\frac{\hbar\phi}{2} \end{pmatrix}, \qquad \exp(\mathrm{i}\phi S_y) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\hbar\phi}{2} & \sin\frac{\hbar\phi}{2} \\ -\sin\frac{\hbar\phi}{2} & \cos\frac{\hbar\phi}{2} \end{pmatrix},$$

---

**3. Domácí úloha**
Jaké jsou možné hodnoty výsledku měření spinu ve směru osy $x$ na stavu

$$|\psi\rangle = 3|z, +\rangle + 2\mathrm{i}|y, -\rangle$$

S jakými pravděpodobnostmi tyto hodnoty naměříme? Jaká je střední hodnota spinu ve směru osy $x$ v tomto stavu?
Co by se mohlo k výpočtu hodit:

$$|x, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z, +\rangle \pm |z, -\rangle) \qquad |y, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z, +\rangle \pm \mathrm{i}|z, -\rangle)$$
$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}|x, +\rangle\langle x, +| - \frac{\hbar}{2}|x, -\rangle\langle x, -|$$
$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}|y, +\rangle\langle y, +| - \frac{\hbar}{2}|y, -\rangle\langle y, -|$$
$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}|z, +\rangle\langle z, +| - \frac{\hbar}{2}|z, -\rangle\langle z, -|$$

Střední hodnota operátoru $\hat{A}$ ve stavu $|\psi\rangle$ je $\langle\psi|A|\psi\rangle$.

---

**4. Domácí úloha**
Spinová část hamiltoniánu pro elektron magnetickém poli je

$$\hat{H} = -\frac{e}{m_e c} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B},$$

kde $\boldsymbol{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ je vektor složený z Pauliho spinových matic. Vypočítejte časový vývoj stavu

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|z.+\rangle + b(t)|z,-\rangle$$

v magnetickém poli $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z)$. Vypočítejte střední hodnoty $\langle\psi(t)|\hat{S}_i|\psi(t)\rangle$ a ukažte, že vektor $(\langle\hat{S}_x\rangle, \langle\hat{S}_y\rangle, \langle\hat{S}_z\rangle)$ rotuje kolem osy $z$ úhlovou rychlostí $\omega = \frac{eB}{m_e c}$. Jaká bude frekvence otáčení pro magnetické pole $B = 1\,\mathrm{mT}$ ?

---

**5.domácí úloha - snadnější verze**
Vyřešte jednorozměrný problém částice v potenciálu tvaru schodu o výšce $V_0$, uvažujte případ $E > V_0$.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

- Ukažte, že obecný tvar vlnové funkce vyhovující stacionární schrödingerově rovnici je:

$$\Psi_{x<0} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x}$$

$$\Psi_{x>0} = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 x}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \qquad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}},$$

  Ukažte, že členy $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x}$ a $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x}$ odpovídají častici (resp. vlně), která se pohybuje ve směru osy $x$, kdežto $B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x}$ a $D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 x}$ odpovídají částici (vlně), která se pohybuje proti směru osy.

- Odvoďte vztahy pro $A, B, C$ a $D$, které plynou z podmínky spojitosti vlnové funkce a její derivace.

- Dále uvažujme případ, kdy na potenciálový schod neletí žádná částice zprava, tedy $D = 0$. Členy $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x}$, $B\mathrm{e}^{=\mathrm{i}k_1 x}$ a $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x}$ představují dopadající, odraženou a prošlou vlnu. Vypočtěte koeficient odrazu $R$ a koeficient průchodu $T$.

$$R \equiv \frac{\text{odražený proud}}{\text{dopadající proud}}$$

$$T \equiv \frac{\text{prošlý proud}}{\text{dopadající proud}}$$

  Zde "proud" znamená "tok" pravděpodobnosti

$$j = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi^\star - \psi^\star\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi\right)$$

Výsldné vztahy je možné upravit až na tvar

$$R = \frac{(1-Q)^2}{(1+Q)^2} \qquad T = \frac{4Q}{(1+Q)^2}, \qquad \text{kde} \quad Q = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}$$

Všimněte si, že tento výsledek nezávisí na hmotnosti částice ( Proč?). Co výsledek znamená v limitních případech $V_0 = E$ a $V_0 \ll E$?

---

**5.domácí úloha - obtížnější verze**
Částice o energii $E > V_0$ nalétává na potenciál ve tvaru bariéry o výšce $V_0$ a šířce $a$.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Najděte obecné řešení a předpokládejte, že žádná částice nepřilétá zprava. Použitím podmínky spojitosti vlnové funkce i její derivace vypočtete transmisní a reflexní koeficienty. Výsledek:

$$T = \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2}\right)^2 \sin^2(k_2 a)\right)^{-1}$$

což lze označením $\lambda = a\sqrt{2mV_0/\hbar^2}$ a $\varepsilon = E/V_0$ upravit na tvar

$$T = \left(1 + \frac{1}{4\varepsilon(\varepsilon - 1)} \sin^2(\lambda\sqrt{\varepsilon - 1})\right)^{-1}$$

Podobně lze upravit reflexní koeficient:

$$R = \left(1 + \frac{4\varepsilon(\varepsilon - 1)}{\sin^2(\lambda\sqrt{\varepsilon - 1})}\right)$$

Všimněte si, že výsldek – narozdíl od "potenciálového schodu" – závisí i na hmotnosti částice.

- Jaké jsou $T, R$ pro limitní případy $E = V_0$ a $E \gg V_0$?
- V optice máme "totální odraz", v kvantovce máme "totální transmisi" pro $\lambda\sqrt{\varepsilon - 1} = n\pi$. (nakreslete si graf) Resonance tohoto typu se pozorují při rozptylu nízkoenergetických elektronů na atomech vzácných plynů (Ramsauer-Townsend effect), nebo při rozptylu neutronu na jádrech.
- Snadno můžeme prozkoumat i případ odrazu na potenciálové jámě, když položíme $V < 0$.

---

**6.domácí úloha**

- Vypočítejte fourierovu transformaci "trojúhelníku":

$$\phi(k) = \begin{cases} A(a - |k|) & |k| < a \\ 0 & |k| > a \end{cases}$$

- Máme vlnovou funkci volné částice ve tvaru gaussovského vlnového balíku:

$$\phi(k) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-a^2(k-k_0^2)}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) \exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}$$

Pro její časový vývoj platí:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) \exp(\mathrm{i}kx - \omega t)\,\mathrm{d}k \qquad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Celkem zdlouhavými úpravami lze dospět ke vztahu (nemusíte provádět!)

$$|\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \frac{1}{\gamma(t)} \exp\left(-\frac{2}{(a\gamma(t))^2}\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2\right)$$

$$\gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}$$

  - Co všechno dokážete z tohoto vzthau vyčíst? (tvar, poloha, neurčitost polohy)
  - Zdůvodněte, že pro neurčitost polohy můžeme napsat $\Delta x(t) = \gamma(t) \cdot a/2$.
  - Jaká bude neurčitost polohy elektronu s energií 25 eV, poté co projde vzdálenost 100 m, jestliže původní neurčitost jeho polohy byla 1 $\mu$m?
  - Jaká bude neurčitost polohy elektronu s energií 100 MeV, poté co projde vzdálenost 100 m, jestliže původní neurčitost jeho polohy byla 1 mm?

---

**7.domácí úloha**

Ukažte, že pro Gaussovský vlnový balík platí minimalizované relace neurčitosti.

(tzn. pro vlnový balík s rozložením hybnosti $\phi(k) = A\exp(-a^2(k-k_0)^2/4)$ spočítejte střední hodnotu souřadnice, střední hodnotu hybnosti, a střední kvadratické fluktuace souřadnice a hybnosti a ukažte, že platí $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$)

---

**8.domácí úloha**

- Spočítejte pro harmonický oscilátor střední hodnoty $x, p, x^2, p^2$ ve stacionárních stavech.
- Ukažte, že pro stacionární stavy platí relace neurčitosti.

- Jak se budou v čase vyvýjet střední hodnoty $x, p$ pro stav $|\psi\rangle = |n\rangle + |n+1\rangle$? Nezapomeňte normalizovat!

---

**9.domácí úloha**

- Při měrení momentu hybnosti nějakého kvantového systému vzhledem k ose $\mathcal{O}$ byl výsledek $\hbar$. Jak by dopadlo měření momentu hybnosti vzhledem k ose $\mathcal{O}'$, která je s $\mathcal{O}$ rovnoběžná a je od ní vzdálena o $d$? Výpočty neprovádějte, jen kvalitativně popište co a jak se musí spočítat.
- Ukažte platnost relací neurčitosti pro měření momentu hybnosti. (tzn. spočítejte $\Delta M_x \cdot \Delta M_y$ ve stavu $|j, m\rangle$ a ukažte, že je větší nebo roven střední hodnotě $M_z$)

---

**10.domácí úloha**

Spočítejte střední hodnotu vzdálenosti elektronu od jádra (pro atom vodíku) ve stavech $|100\rangle$ a $|200\rangle$.

A kdo si chcete započítat tak můžete zkusit ukázat obecný vztah:

$$\langle nlm|r|nlm\rangle = a\frac{3n^2 - l(l-1)}{2}$$

---

**11.domácí úloha**

Spočítejte poruchovou teorií opravu prvního a druhého řádu pro energii anharmonického oscilátoru s hamiltoniánem $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{M\Omega^2}{2}x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4$, kde $\alpha, \beta$ jsou malé. (opravu druhého řádu počítejte jen pro člen s $x^3$)