- Uvažujme operátor A. Jestliže existuje operátor A^{-1} takový, že $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$, nazýváme jej inverzním k operátoru A.
- Pro skoro každý operátor A existuje operátor A^+ s vlastností $\langle A^+\phi, \psi\rangle = \langle \phi, A\psi\rangle$. Takový A^+ se nazývá sdružený operátor k operátoru A.
- **Příklad:** Operátor Q je v nějaké bázi reprezentován maticí
$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
Jak vypadá Q^+, Q^{-1}?
- **Příklad:** Ukažte, že platí
$$(A+B)^+ = A^+ + B^+, \qquad (AB)^+ = B^+A^+$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$$
- Operátor A pro který platí $A^+ = A$ nazýváme samosdružený (hermiteovský).
- **Příklad:** Ukažte, že součin dvou hermiteovských operátorů je hermiteovský právě tehdy, když jejich komutátor je nulový.
- Projekčním operátorem nazýváme takový samosdružený operátor $\hat{P}$, pro který platí $\hat{P}^2 = \hat{P}$
- **Příklad:** Ukažte, že je-li P projekční operátor, pak také $1 - P$ je projekční operátor.
- **Příklad:** Ukažte, že je-li $|a\rangle$ normovaný, pak $\hat{I}_a = |a\rangle\langle a|$ je projekční operátor. Jaká podmínka pro stavy $|a\rangle, |b\rangle$ musí být splněna, aby operátor $I_a + I_b$ byl projekčním operátorem?
- **Důsledek předchozích výpočtů:** Nechť $|a_i\rangle$ je ortonormální báze $\mathcal{H}$. Pak operátor identity lze zapsat jako
$$1 = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|$$
Speciálně lze pak napsat $|\psi\rangle = \sum_i (\langle a_i|\psi\rangle) \cdot |a_i\rangle$, což znamená, že $\langle a_i|\psi\rangle$ jsou souřadnice vektoru $|\psi\rangle$ v příslušné bázi.
- **Příklad:** Ukažte výpočtem pomocí matic, že platí
$$1 = |y,+\rangle\langle y,+| + |y,-\rangle\langle y,-|$$
$$|y,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z,+\rangle \pm \mathrm{i}|z,-\rangle\right)$$
- V mnoha případech je možné reprezentovat meření nějaké veličiny následujícím způsobem. Měříme veličinu A, která může nabývat pouze diskrétních hodnot $a_1, a_2, \ldots$. Stav, pro který bude výsledek měření s určitostí a_i označíme $|a_i\rangle$. Navíc předpokládáme, že stav systemu jednoznačně určen hodnotou veličiny A.

  Amplituda pravděpodobnosti, že na systému, který byl ve stavu $|\psi\rangle$ bude výsledek měřeni hodnota a_i je $\langle a_i|\psi\rangle$. Víme-li, že byla změřena hodnota a_i, pak je systém po měření ve stavu $|a_i\rangle$.

- **Příklad:** Ukažte, že střední hodnota veličiny A ve stavu $|\psi\rangle$ je

$$\langle\psi|\left(\sum_i a_i|a_i\rangle\langle a_i|\right)|\psi\rangle \equiv \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle.$$

Veličina A je pak reprezentována operátorem $\hat{A} \equiv \sum a_i|a_i\rangle\langle a_i|$. Vlastní hodnoty takového operátoru jsou a_i a jim příslušejí vlastní vektory $|a_i\rangle$.

- **Příklad:** Ukažte, že fyzikální veličiny jsou reprezenovány samosdruženými operátory.

- **Příklad:** Neutron je připraven ve stavu $|\psi\rangle = 3|z,+\rangle + 2\mathrm{i}|y,-\rangle$. Jaké jsou možné výsledky měření průmětu spinu ve směrech x, y, z? S jakou pravděpodobností nastávají? Jaké jsou střední hodnoty?

- Reprezentace operátoru v bázi. Operátor je úplně určen tím, jak působí na vektory báze. Nechť $|e_i\rangle$ je ortonormální báze. V obecnosti působení operátoru S napsat:

$$\hat{S}|e_i\rangle = \sum_j S_{ij}|e_j\rangle$$

kde S_{ij} jsou nějaká čísla resp. všechna S_{ij} tvoří matici. Obecný vektor napíšeme jako $|\psi\rangle \sum_i\langle e_i|\psi\rangle \cdot |e_i\rangle$.

$$S|\psi\rangle = \sum_j(\sum_i S_{ij}\langle e_i|e_j\rangle)|e_j\rangle$$

To znamená, že souřadnice vektoru $S|\psi\rangle$ jsou v bázi $|e_j\rangle$ zapsány jako $(\sum_i S_{ij}\langle e_i|e_j\rangle)$. Říkáme, že operátor S je v této bázi reprezentován maticí S_{ij}.

- Operátor U se nazývá unitární, jestliže $U^{-1} = U^{+}$.

- **Příklad:** Ukažte, že pro libovolné vektory platí $\langle\phi,\psi\rangle = \langle U\phi, U\psi\rangle$.

- **Příklad:** Nechť $|a_i\rangle, |b_i\rangle$ jsou dvě ortonormální báze. Ukažte, že operátor

$$\sum_i |a_i\rangle\langle b_i|$$

je unitární. To ukazuje, že dvě ortonormální báze spolu souvisejí unitární transformací.

- **Příklad:** Ukažte, že operátory A a SAS^{-1} mají stejné vlastní hodnoty.

- **Příklad:** Ukažte, že pokud pro operátory A, B existují společné vlastní vektory, pak $[A,B] = 0$. Fyzikální veličiny, jejichž operátory komutují nazýváme kompatibilní – mohou obě zároveň s jisotoutu nabývat nějaké konkrétní hodnoty. Naopak, pokud $[A,B] \neq 0$ (nekompatibilní pozorovatelné), pak je možné najít takový stav, ve kterém nemohou obě měření s jistotou nabývat určité hodnoty.