Příklady z kvantové mechaniky k domácímu počítání

1. *Počet kvant: 1*
   Helium–neonový laser emituje záření s vlnovou délkou $\lambda = 633$ nm s výkonem $P = 5$ mW. Kolik fotonů vyletí z tohoto laseru za jednu sekundu?

2. *Počet kvant: 1*
   Ke zkoumání struktury krystalů se používá neutronová difrakce. Odhadněte energii a rychlost neutronů, které jsou pro tento účel vhodné. (Vhodné jsou ty, které mají podobnou vlnovou délku, jako je vzdálenost sousedních atomů v krystalu.)

3. *Počet kvant: 2*
   Jak by se změnila vlnová délka čáry Balmerovy série s $\lambda = 486,1$ nm (odpovídá přechodu $n = 4 \rightarrow n = 2$) atomu vodíku, kdyby atomové jádro zůstávalo na místě, tj. kdyby bylo nekonečně těžké? Jaká vlnová délka odpovídá stejnému přechodu $n = 4 \rightarrow n = 2$ v atomu deutéria? Lze tak jemné rozdíly vlnových délek v současnosti měřit?

4. *Počet kvant: 1*
   Excitovaný atom neonu vyzářil foton o vlnové délce 400 nm. Atom se nacházel v klidu. Jakou rychlost má atom po vyzáření fotonu?

5. *Počet kvant: 2*
   Magnetický dipólový moment proudové smyčky je definován vztahem $\mu = IA$, kde I, A je po řadě proud a plocha smyčky. Proudová smyčka může být reprezentována elektronem, který krouží kolem jádra konstantní rychlostí po kruhové dráze. Ukažte klasickou úvahou, že magnetický dipólový moment tohoto elektronu je dán vztahem $\mu = eL/2m$, kde e, L a m je náboj, moment hybnosti a hmotnost elektronu.

6. *Počet kvant: 2*
   Dokažte, že jestliže je $\hat{A}$ hermitovský operátor, je operátor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{A}}$ unitární.

7. *Počet kvant: 1*
   Dokažte, že operátor parity definovaný vztahem $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ je hermitovský. Dále ukažte, že vlastní vektory odpovídající vlastním hodnotám 1 a -1 jsou ortogonální.

8. *Počet kvant: 2*
   Najděte stacionární řešení Schrödingerovy rovnice volné částice v jedné dimenzi s hamiltoniánem $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$, kde V je konstantní potenciál. Vypočtěte fázovou a grupovou rychlost vlny. Jak si vysvětlíte závislost fázové rychlosti na potenciálu V?

9. *Počet kvant: 3*
   Uvažujme fyzikální systém a v něm fyzikální veličinu A, která nekomutuje s Hamiltonovým operátorem. A má vlastní stavy tvaru $\varphi_1 = (u_1 + u_2)/\sqrt{2}$ a $\varphi_2 = (u_1 - u_2)/\sqrt{2}$ s vlastními hodnotami a_1, a_2, kde u_1, u_2 jsou vlastní stavy hamiltoniánu s vlastními hodnotami E_1, E_2. Je-li v čase $t = 0$ systém ve stavu φ_1, vypočtěte střední hodnotu veličiny A v čase t.

10. *Počet kvant: 3*
Vlnová funkce volné částice v čase $t = 0$ je $\psi(x,0) = c\exp(-x^2/4\Delta^2)$. Ukažte, že neurčitost polohy částice Δ_t v čase t je dána vztahem $\Delta_t^2 = \Delta^2 + (\Delta v)^2 t^2$, kde Δv je neurčitost rychlosti částice v čase $t = 0$.

11. *Počet kvant: 3*
Najděte rekurentní diferenciální relaci mezi jednotlivými stacionárními řešeními Schrödingerovy rovnice harmonického oscilátoru. Pomocí této relace odvoďte tvar vlnové funkce $\psi_1(x)$ pro první energiovou hladinu, víte-li, že vlnová funkce základního stavu (nulové hladiny) má tvar $\psi_0(x) = \sqrt[4]{m\omega/\pi\hbar}\ \mathrm{e}^{-m\omega x^2/2\hbar}$.

12. *Počet kvant: 2*
Najděte vlnovou funkci $\psi_0(x)$ základního stavu harmonického oscilátoru z toho, že víte, že $\hat{a}\psi_0(x) = 0$. Anihilační operátor $\hat{a}$ vyjádřete v souřadnicové reprezentaci a řešte vzniklou diferenciální rovnici např. metodou separace proměnných.

13. *Počet kvant: 2*
V Heisenbergově obraze nalezněte pohybové rovnice operátorů souřadnice a hybnosti harmonického oscilátoru s hamiltoniánem
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}.$$

14. *Počet kvant: 3*
Elektron se nachází v harmonickém potenciálu s minimem v počátku souřadnic, v němž má frekvenci oscilací $\omega = 2\pi.10^7$ rad/s. Střední hodnoty operátorů hybnosti a souřadnice elektronu v čase $t = 0$ byly $\overline{p} = 10^{-27}$ kg m/s a $\overline{x} = 10^{-5}$ m. Jaké budou střední hodnoty těchto operátorů v čase $t = 2,5.10^{-8}$ sekundy? Kolik kvant je přibližně nabuzeno?

15. *Počet kvant: 2*
Kolik možných stavů světla (módů) ve viditelné části spektra se nachází v krychlové dutině o hraně 1 cm? Přibližně kolik viditelných fotonů bude v této dutině při teplotě (a) 20 stupňů Celsia, (b) 1500 stupňů Celsia?

16. *Počet kvant: 2*
Najděte vázané stavy částice v potenciálu tvaru Diracovy delta-funkce $V = -A\delta(x - x_0)$. Proč existuje vždy jen jeden vázaný stav?

17. *Počet kvant: 2*
Částice se nachází v základním stavu v nekonečně hluboké potenciálové jámě, jejíž stěny mají souřadnice $-a/2$ a $a/2$. Náhle stěny posuneme do poloh $-b/2$ a $b/2$, kde $b > a$. S jakou pravděpodobností bude nyní částice v základním, resp. prvním excitovaném stavu? Jaké je jednodché zdůvodnění pro druhou odpověď?

18. *Počet kvant: 2*
Částice se nachází v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky a v prvním excitovaném

stavu. Jak se změní energie tohoto stavu, jestliže zapneme přídavné elektrické pole, které vytvoří harmonický potenciál s rovnovážnou polohou ve středu jámy?

19. *Počet kvant: 4*
Atom tritia se nachází v základním stavu. Vtom dojde k rozpadu jádra, při němž z jádra vyletí velmi rychlý elektron, který nestačí ovlivnit původní orbitální elektron atomu. Jaká je pravděpodobnost toho, že se vzniklý iont hélia $^3_2$He bude těsně po rozpadu (a) v základním stavu, (b) ve stavu $2s$? Může se iont po rozpadu nacházet ve stavu $2p$?

20. *Počet kvant: 3*
Částice v harmonickém potenciálu se nachází v základním stavu. V čase $t = 0$ zapneme na velmi krátkou dobu Δt poruchu $\hat{V} = -\frac{A\hat{x}}{\Delta t}$, kde A je velmi malá konstanta. Vypočtěte v první aproximaci teorie poruch pravděpodobnost, že částice přejde do prvního, resp. druhého excitovaného stavu.

21. *Počet kvant: 3*
Najděte v první aproximaci teorie poruch energii a vlnovou funkci základního stavu částice v harmonickém potenciálu s poruchou. Neporušený hamiltonián je

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2},$$

porucha pak $V = A\hat{x}$, kde A je malá konstanta. Dalo by se odpovědi dobrat i jednodušším způsobem než užitím poruchové teorie?

22. *Počet kvant: 3*
Variační metodou najděte přibližnou vlnovou funkci základního stavu harmonického oscilátoru s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}.$$

Hledejte ji v jednoparametrické množině funkcí

$$\psi_a(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4a^2}}{\sqrt[4]{2\pi}\sqrt{a}}.$$

Jak si vysvětlíte, že řešení dává přesnou vlnovou funkci základního stavu?

23. *Počet kvant: (a) – 2, (a) + (b) – 4, (a) + (b) + (c) – 6*
(a) Odvoďte vztahy pro transformaci spinové části vlnové funkce elektronu (spin 1/2) při otočení o úhel φ kolem osy z, víte-li, že platí $|\psi\rangle' = \exp(\mathrm{i}\varphi\hat{S}_z/\hbar)|\psi\rangle$, kde $\hat{S}_z$ je operátor z-tové složky spinu elektronu. Jak se změní vlnová funkce při otočení o plný úhel 2π?
(b) Totéž co v (a), ale pro rotaci o úhel φ kolem osy y.
(c) Odvoďte vztahy pro transformaci spinové části vlnové funkce při obecné rotaci dané Eulerovými úhly φ, ψ, θ, víte-li, že tuto rotaci lze provést ve třech krocích: 1) rotace o úhel ψ kolem osy z, 2) rotace o úhel θ kolem osy y, 3) rotace o úhel φ kolem osy z.

24. *Počet kvant: 3*

Uvažujme dvě částice, jednu se spinem 1/2 a druhou se spinem 1. Označme $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ celkový operátor spinu systému obou částic. Nalezněte společné vlastní stavy operátorů $\hat{S}_z$ a $\hat{S}^2$ pomocí analogických vlastních stavů pro operátory spinu obou částic.

25. *Počet kvant: 2*

Tzv. Bellovy stavy dvojice částic se spinem 1/2 jsou dány takto:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle\right)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\right)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\right),$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle\right),$$

kde $|0\rangle$ a $|1\rangle$ označují stavy jedné částice se spinem ve směru a proti změru osy z. Provedením stopy přes druhou částici najděte matici hustoty první částice pro všechny čtyři Bellovy stavy.

26. *Počet kvant: 4*

Nejobecnější matice přechodu od jedné ortonormální báze k jiné je tzv. U(2) matice

$$A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\sin\theta & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\cos\theta \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ jsou reálná čísla. Najděte vyjádření Bellových stavů (viz příklad 25) v nové bázi, znáte-li z předchozího příkladu jejich vyjádření v původní bázi.

Návod: v maticovém zápisu máme

$$|0\rangle_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e, \quad |1\rangle_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e,$$

kde e značí původní bázi. Vektor v nové bázi získáme násobením vektoru ve staré bázi zleva maticí přechodu, tedy např.

$$|1\rangle_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}\cos\theta \end{pmatrix}_{e'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha+\gamma}\sin\theta\,|0\rangle_{e'} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma)}\cos\theta\,|1\rangle_{e'}.$$

Dosazením vektorů $|0\rangle_e$ a $|1\rangle_e$ v nové bázi do Bellových stavů pak dostaneme vyjádření Bellových stavů v nové bázi.)

27. *Počet kvant: 2*
Dokažte, že Greenberger-Horne-Zeilingerův stav tří částic

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle|1\rangle\big)$$

je vlastním stavem operátoru $\sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_y^{(3)}$ (horní index označuje částici) s vlastní hodnotou -1 a operátoru $\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}$ s vlastní hodnotou 1.

28. *Počet kvant: 3*
Tzv. dvoumódově stlačený stav dvojice harmonických oscilátorů lze vyjádřit jako

$$|\eta\rangle = c\sum_{n=0}^{\infty}\eta^n\,|n\rangle|n\rangle,$$

kde $-1 \leq \eta \leq 1$.
(a) najděte konstantu c, aby byl tento stav správně normován
(b) najděte matici hustoty pouze prvního módu (oscilátoru) tak, že provedete stopu („Trace“) celkové matice hustoty přes druhý mód.
(c) – nepovinné – přesvědčte se, že výsledná matice hustoty popisuje termální stav, tedy že ji lze napsat jako

$$\hat{\rho} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}}{\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}},$$

kde $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ je hamitonián systému a $\beta = 1/kT$ je vhodná konstanta související s konstantou η.

29. *Počet kvant: 3*
Uvažujme spektrální rozklad hamitoniánu $\hat{H} = \sum_n E_n|n\rangle\langle n|$ pomocí jeho vlastních stavů $|n\rangle$ a jim příslušných vlastních hodnot E_n. Dokažte, že pro evoluční operátor $\hat{U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}$ pak platí

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t} = \sum_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_n t}|n\rangle\langle n|$$

Nápověda: využijte toho, že projekční operátor $\hat{P}_n \equiv |n\rangle\langle n|$ má jen dvě vlastní hodnoty 0 a 1 a dále využijte vlastností funkce operátoru vzhledem k vlastním vektorům tohoto operátoru

30. *Počet kvant: 3*
Najděte vlastní stavy a energetické spektrum pro částici v potenciálu

$$V = \begin{cases} kx^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

Jaké fyzikální situaci by mohl tento potenciál odpovídat?

31. *Počet kvant: 2*
Uvažujte jednoduchý harmonický oscilátor. Odvoďte jak vypadá Schrödingerova rovnice ve impulsové reprezentaci. Jak v této reprezentaci vypadají stacionární stavy?

32. *Počet kvant: 4*
Koherentní stav harmonického oscilátoru je definován jako vlastní stav anihilačního operátoru a:

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

kde λ je komplexní číslo.

- Ukažte, že $|\lambda\rangle = \mathrm{e}^{-|\lambda|^2}\mathrm{e}^{\lambda a^+}|0\rangle$
- Ukažte, že koherentní stavy splňují minimální relace neurčitosti pro x,p.
- Jak vypadjí koherentní stavy v bázi stacionárních stavů $|n\rangle$
- Ukažte, že koherentní stavy můžeme také získat působením operátoru posunutí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}pl/\hbar}$. (p je operátor hybnosti a l je vzdálenost)

33. *Počet kvant: 4*
Uvažujte operátory

$$J_\pm = \hbar a_\pm^\dagger a_\mp \qquad J_z = \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a-) \qquad N = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-$$

kde $a_\pm$ resp. $a_\pm^\dagger$ jsou anihilační resp. kreační operátory pro dva nezávislé harmonické oscilátory, splňující běžné komutační relace $[a, a^\dagger] = 1$. Ukažte, že platí

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, \qquad [J^2, J_z] = 0, \qquad J^2 = \frac{\hbar^2}{2}N\left(\frac{N}{2}+1\right)$$

Jak by se tento výsledek dal interpretovat? (Schwingerova bosonová reprezentace momentu hybnosti)