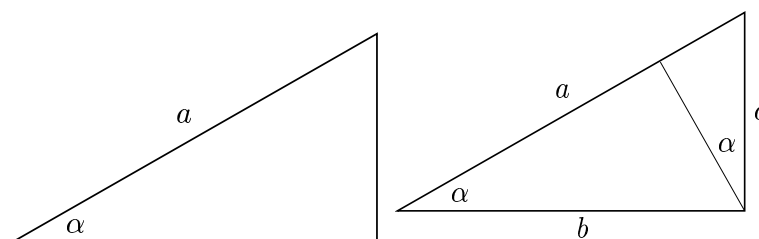


Teorie podobnosti

- Velice zajímavá oblast fyziky
- Mnoho výsledků dostaneme jen na základě rozměrové analýzy; rozměr je ve fyzice důležitý!
- Průkopníci: Reynolds, Landau, ...
- Pythagorova věta:

$$S = a^2 f(\alpha)$$



$$a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Jak vnímají svět mravenci?

- Představme si, že bychom se zmenšili n krát. Jak by z našeho pohledu vypadal svět kolem nás?
- Nebo jiná otázka: Zmenšili bychom se n krát ; co by se ještě muselo změnit, aby svět kolem nás vypadal stejně, jak jej vnímáme nyní?
- Abychom mohli na tyto otázky odpovědět, je třeba definovat nějaké veličiny, které by se nezměnily, a z nich odvodit ostatní.
- Chceme například, aby např. atomy a struktura hmoty byla stále stejná.
- Představme si toto: zmenším se $10\times$, jsem stále ze stejného materiálu. Chci pohnout rukou. Síla svalu $\propto$ průřez $\propto l^2$, hmotnost ruky $\propto l^3$:

$$a = \frac{F}{m}, \quad F \propto l^2, \quad m \propto l^3 \Rightarrow a \propto l^{-1} \quad (1)$$

– tedy ruka vystřelí s $10\times$ větším zrychlením!

- Jakou dosáhu rychlost? Také $10\times$ větší? Ne! Energiová úvaha:

$$E = \frac{1}{2} m v^2, \quad E \propto l^3, \quad m \propto l^3 \Rightarrow v \propto l^0$$

Rychlost bude stejná. I z druhé strany, při rovnoměrně zrychleném pohybu platí

$$v = \sqrt{2al}, \quad a \propto l^{-1}, \Rightarrow v \propto l^0$$

- **Tíhové zrychlení** – projeví se například jako mechanické napětí v našich kostech při stání na zemi:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}, \quad m \propto l^3, \quad S \propto l^2 \Rightarrow p \propto l^1,$$

je úměrné výšce podobně jako hydrostatický tlak

- Aby tlak zůstal stejný, muselo by se změnit g :

$$g = \frac{pS}{m}, \quad m \propto l^3, \quad S \propto l^2, \quad p \text{ pevné} \Rightarrow g \propto l^{-1},$$

tedy stejný výsledek jako u zrychlení (1).

- Mravenec je asi $100\times$ menší než člověk – zemské zrychlení mu tedy připadá $100\times$ slabší než nám; unese tedy nesrovnatelně více než my
- Blecha – délka skoku $d = (v^2 \sin \alpha)/g$ relativně $100\times$ větší (ve vakuu). Ale pozor – odpor vzduchu!
- Stébla trávy – relativně mnohem tenší než kmeny stromů
- Velcí savci mají mohutnější kostru než malí
- Tíhové zrychlení měříme v přirozených jednotkách – s jakým zrychlením umím pohnout rukou I v tomto případě $g \propto l^{-1}$, abychom je vnímali stejně.
- Digitální křemenné hodiny (quartz). Odvozují čas od periody kmitů křemenného piezokrystalu:

$$T = 2 \frac{\text{délka krystalu}}{\text{rychlost vln}} \Rightarrow T \propto \frac{l^1}{l^0} = l^1$$

platí $T \propto l^1$, hodiny tedy půjdou tím rychleji, čím jsou menší!

- Mechanické hodiny s torzním kyvadlem (lze zobecnit na nepokoj):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{moment setrvačnosti}}{\text{tuhost torzní pružiny}}}, \quad k \propto \frac{l^4}{l} = l^3, \quad J \propto l^2 l^3 = l^5 \Rightarrow T \propto l^1$$

– opět stejný výsledek.

- Tedy k tomu, aby situace vypadaly podobně, musíme při zmenšení délky zmenšit i jednotku času.
- Odpovídá zkušenosti – frekvence kroků mravence je výrazně vyšší než naše, frekvence tepů myši je mnohem větší než u člověka. Kmitání křídly – nejrychleji kmitá moucha, pak kolibřík, vrabec, holub a nejpomaleji albatros.
- Plyne to přímo i z toho, že rychlost se nemění:

$$t = \frac{l}{v} \Rightarrow t \propto l^1$$

- Aby $T \propto l^1$ platilo i pro kyvadlové hodiny, musíme při jejich zmenšení zvětšit tíhové zrychlení:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g \propto l^{-1}, \Rightarrow T \propto l$$

- Zavedeme jednotky přirozené pro mravence (který je $n\times$ menší):

$$1 \text{ coul (c)} = \frac{1}{n} \text{ metr}, \quad 1 \text{ mžik (ž)} = \frac{1}{n} \text{ sekunda}, \quad 1 \text{ unce (u)} = \frac{1}{n^3} \text{ kilogram}$$

- Jestliže bude mít nějaká veličina hodnotu A v přirozených jednotkách mravence a stejnou hodnotu A v našich, budeme ji vnímat stejně
- Např. jednotka zrychlení – $\text{cž}^{-2} = n \text{ ms}^{-2}$. Tedy při $n = 100$ bude zemské tíhové pole $g = 0,1 \text{ cž}^{-2}$ – bude se jevit mravenci $100\times$ slabší než nám.

- Objevujeme tajemství rozměrové analýzy!

veličina	délka	čas	rychlost	hmotnost	hustota	zrychlení	povr. nap.	viskozita	energie	tlak, E/V	akce
označení	l	t	v	m	ρ	a	σ	ν	E	E/V	S
SI jednotka	m	s	m s^{-1}	kg	kg/m^3	m s^{-2}	kg s^{-2}	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
mrav. jednotka	coul (c)	mžik (ž)	c ž^{-1}	unce (u)	u/c^3	c ž^{-2}	u ž^{-2}	$\text{c}^2 \text{ž}^{-1}$	$\text{u c}^2 \text{ž}^{-2}$	$\text{u c}^{-1} \text{ž}^{-2}$	$\text{u c}^2 \text{ž}^{-1}$
převod. koef.	n^1	n^1	n^0	n^3	n^0	n^{-1}	n^1	n^1	n^3	n^0	n^4
pro $n=10$	10	10	1	1000	1	1/10	10	10	1000	1	10000

- Kapky rosy visí na trávě a nespadnou – nejenže je σ větší, ale i g menší
- Přetlak uvnitř bakterie – několik atmosfér
- Vodoměrky na vodě, brouk potápník (potápěč by si asi nenesl vzduch na zadku), pavouk s podvodním hnízdem, mušky v Bihoru
- Mravenec si neublíží ani při pádu z velké výšky
- Z velkého sudu vyteče med podobně jako voda, z malého hrnku poteče viskózně
- Velké věci jsou mnohem zranitelnější než malé
- Veličiny, které zůstávají stejné:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad e = \frac{E}{V}$$

- Z toho, že ρ, e se nemění a délka se změní, plyne škálování všech ostatních mechanických jednotek, protože všechny takové jednotky jsou odvozeny ze tří SI jednotek – metr, sekunda, kilogram.
- Platí

$$v = \sqrt{\frac{e}{\rho}}, \quad m = \rho l^3, \quad t = \frac{l}{v} = l \sqrt{\frac{\rho}{e}}$$

Fundamentální konstanty

- Planckova

$$\hbar \approx 10^{-34} \text{Js} = n^4 \cdot 10^{-34} \text{uc}^2 \text{ž}^{-1}$$

Tedy $\hbar \approx 1 \text{uc}^2 \text{ž}^{-1}$ pro $n = 3 \cdot 10^8 \Rightarrow l = 3 \cdot 10^{-9} \text{m}$. Pro takto velká tělesa se začne projevovat kvantová mechanika.

- Boltzmannova

$$k \approx 10^{-23} \text{JK}^{-1} = n^3 \cdot 10^{-23} \text{uc}^2 \text{ž}^{-2} \text{K}^{-1}$$

Tedy $kT \approx 1 \text{uc}^2 \text{ž}^{-2}$ při $T = 300 \text{K}$ pro $n = 7 \cdot 10^6 \Rightarrow l = 2 \cdot 10^{-7} \text{m}$. Pro takto velká tělesa se začnou projevovat tepelné fluktuace, Brownův pohyb atd.

- Kdybychom se hodně zmenšili, měli bychom docela problémy:
 - Byli bychom kvantově rozmazaní
 - Vypadali bychom jako postižení Parkinsonovou chorobou
 - Museli bychom se prodírat velmi viskózním vzduchem
 - Sotva bychom se mohli nadechnout
 - Každá kapka by nás mohla lapit – museli bychom se potírat vodoodpudivým krémem
 - Ale pak bychom se zase nenapili
 - Každý krok obtížný – nutnost překonávat van der Waalsovy síly
 - Při podání ruky příteli – možná by zůstala v jeho ruce

Zajímavosti

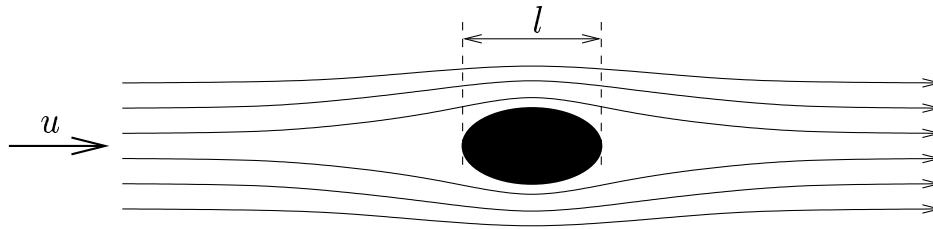
- Jaká je rychlost zvuku v ideálním plynu?
- Parametry: teplota, tlak, hustota, hmotnost molekul plynu, velikost molekul plynu, Poissonova konstanta,...
- Nezávislých je méně: κ, k, T, ρ, m, r
- Velikost molekul není podstatná
- Hledáme veličinu, která má rozměr rychlosti
- Např. kombinace $\sqrt{kT}$
- Střední kvadratická rychlost $v_k = \sqrt{3kT}$
- Tedy rychlost zvuku bude asi nějak podobně; a skutečně, $v_z = \sqrt{\kappa kT}$

Kapaliny

- Navier–Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou viskózní kapalinu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Situace – např. obtékání tělesa o charakteristickém rozměru l kapalinou rychlostí u .



Bude výhodné měřit rychlosti v jednotkách u a souřadnice v jednotkách l . Dále čas v jednotkách l/u a poměr p/ρ v jednotkách u^2 . Zavedeme tedy bezrozměrné veličiny:

$$\mathbf{r} = l\mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = u\mathbf{v}', \quad t = \frac{l}{u}t', \quad \frac{p}{\rho} = u^2 \left(\frac{p}{\rho} \right)',$$

Dosazením

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla' \left(\frac{p}{\rho} \right)' + \frac{\nu}{ul} \Delta' \mathbf{v}'$$

Kdy budou dvě proudění podobná? Když tato bezrozměrná rovnice bude pro obě stejná, tedy jestliže poměr ν/ul bude stejný. Bezrozměrné Reynoldsovo číslo

$$R = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\eta}$$

určuje charakter proudění a pokud je stejné pro dvě obtékání geometricky podobných těles, bude i charakter obtékání stejný (turbulentní, laminární apod.).

Vektor rychlosti v daném bodě pak

$$\mathbf{v} = uf \left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R \right)$$

Podobně tlak a celková síla na těleso

$$p = \rho u^2 f \left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R \right), \quad F = \rho u^2 l^2 f(R)$$

Stokesův vzorec $F = 6\pi\eta ru$ splňuje s $f(R) = 6\pi/R$ a charakteristický rozměr $l = r$ – poloměr obtékané koule.

Mechanika

- (dle Landau, Lifšic)

Dumejme, že potenciální energie je homogenní funkcí souřadnic:

$$V(\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \alpha \mathbf{r}_n) = \alpha^k V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n).$$

Představíme si, že danou fyzikální situaci „nafoukneme“. Tedy že všechno zvětšíme α krát. Navíc nafoukneme i čas β krát.

$$\mathbf{r}_1 \longrightarrow \mathbf{R}_i = \alpha \mathbf{r}_i, \quad t \longrightarrow T = \beta t$$

Pak $\mathbf{V}_i = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{v}_i$. Kinetická energie se tedy změní $(\alpha/\beta)^2$ krát. Pokud by náhodou platilo $(\alpha/\beta)^2 = \alpha^k$, pak by se Lagrangeova funkce změnila jen o multiplikativní faktor a pohybové rovnice by vypadaly stejně v původních i nových souřadnicích. Pak

$$\beta = \alpha^{1-k/2}$$

Tedy jestliže je potenciál homogenní funkcí souřadnic, budou trajektorie podobné, když bude platit

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{L}{l}\right)^{1-k/2}, \quad \frac{V}{v} = \left(\frac{L}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{L}{l}\right)^k, \quad \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{1+k/2},$$

- *Harmonický potenciál*: $k = 2$, $s = 1 - k/2 = 0$. Proto perioda pohybu nezávisí na amplitudě, rychlost na ní závisí lineárně.
- *Homogenní gravitační či elektrické pole*: $k = 1$, $s = 1 - k/2 = 1/2$. Čas se mění s odmocninou z výšky pádu. I rychlost se mění s odmocninou z výšky pádu.
- *Centrální pole (např. gravitační)*: $k = -1$, $s = -3/2$. Druhá mocnina periody je úměrná třetí mocnině poloměru dráhy (3. Keplerův zákon). Rychlost je nepřímo úměrná odmocnině poloměru dráhy.
- Podobně můžeme zkoumat, co se stane, když změníme potenciál samotný (např. zvětšením náboje atomového jádra γ krát). Pak $(\alpha/\beta)^2 = \gamma \alpha^k$. Např. pro $k = -1$ a $\alpha = 1$ bude $\beta = \gamma^{-1/2}$, tedy pohyb po dané trajektorii bude $\sqrt{\gamma}$ krát rychlejší.

Kvantová teorie

- Kdy si budou dva světy podobné?
- Schrödingerova rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

- Zvolme prostorovou a časovou jednotku l a l/c a zaveďme bezrozměrnou souřadnici r' a bezrozměrný čas t' :

$$-\Delta'\psi' - 2\frac{e^2m_el}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r'}\psi' = \frac{ilm_ec}{\hbar}\frac{\partial\psi'}{\partial t'}$$

- Volba l není ničím omezena. Zvolíme je tedy tak, aby faktor v potenciální energii byl jednotkový:

$$\frac{e^2m_el}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m_e} = r_B$$

– Bohrovův poloměr atomu.

- Člen u časové derivace:

$$\frac{ilm_ec}{\hbar} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{e^2} = \frac{1}{\alpha}$$

– konstanta jemné struktury. To je jediný parametr, na němž rovnice závisí.

- K čemu rychlost světla? Ne kvůli samotnému atomu, ale při vyzáření fotonu bude na c záviset poměr vlnové délky fotonu a l . Tedy na c závisí λ měřené v jednotkách l .
- Dva světy jsou si podobné, jestliže jsou si rovny konstanty jemné struktury.
- α – naprosto fundamentální konstanta. Právě tím, že nemá fyzikální rozměr a proto ji už nelze nijak škálovat.
- Změna některé základní fyzikální konstanty ($\hbar, c, e, \dots$) – ekvivalentní změně α plus přeskálování
- Změnu některé ze základních fyzikálních konstant ($\hbar, c, e, \epsilon_0$) lze poznat jedině skrze změnu konstanty jemné struktury