ŘEŠENÍ ÚLOHY č.6 (prémiová)

Pružná srážka dvou stejných kulečníkových koulí (nerelativistické řešení) :

Zvolme vztažnou soustavu tak, aby jedna z koulí byla v této soustavě před srážkou v klidu (např. soustava spojená s kulečníkovým stolem). Označme $\vec{p}$ hybnost koule před srážkou. Hybnosti koulí po srážce označme $\vec{p_1}$ a $\vec{p_2}$. Při srážce působí koule na sebe silami, které jsou z hlediska soustavy koulí silami vnitřními. Soustava koulí je tedy izolovaná. Proto je celková hybnost soustavy před srážkou a po srážce stejná:

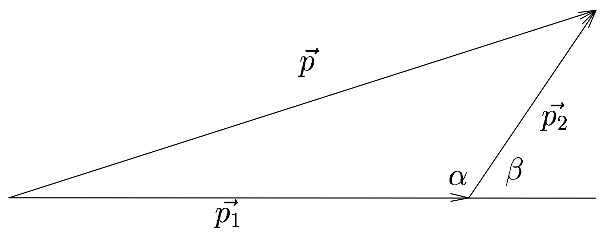
$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \ . \tag{1}$$

Jelikož je srážka pružná, zachovává se i součet kinetických energií obou koulí:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} \ , \tag{2}$$

kde m je hmotnost jedné koule.

Nejprve předpokládejme, že vektory $\vec{p_1}$ a $\vec{p_2}$ mají libovolný směr, ale splňují rovnici (**??**) :



Podle kosinové věty pro tento trojúhelník platí:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\alpha = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\beta \ . \tag{3}$$

Podle rovnice (**??**) musí být také splněna podmínka:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \ . \tag{4}$$

Poslední dvě rovnice jsou splněny současně, právě když platí:

$$p_1p_2\cos\beta = 0 \ . \tag{5}$$

Možná řešení jsou:

$$\cos\beta = 0 \; , \tag{6}$$

$$p_1 = 0 \; , \tag{7}$$

$$p_2 = 0 \; . \tag{8}$$

Podle podmínky (**??**) jsou vektory $\vec{p_1}$ a $\vec{p_2}$ na sebe kolmé ($\beta = 90°$). Koule se tedy rozletí pod pravým úhlem. (Všimněte si, že ve výpočtu není žádný předpoklad o tom, jak do sebe koule narazí, t.j. jaký je úhel mezi vektorem hybnosti první koule a spojnicí středů koulí v okamžiku srážky. Tento úhel určuje, do jakých směrů se koule rozletí za současného splnění podmínky (**??**).)

Podmínky (**??**) a (**??**) popisují mezní případy. První z nich popisuje středovou srážku koulí, při které se dopadající koule zastaví a koule, která byla původně v klidu, převezme veškerou hybnost. Druhá podmínka popisuje případ, kdy se koule minuly, t.j. ke srážce nedošlo.

Relativistické řešení :

Opět vyjdeme ze zákona zachování hybnosti a energie. Rovnice (**??**) a (**??**) můžeme psát beze změny, zákon zachování energie bude mít tvar:

$$mc^2 + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + p_1^2c^2} + \sqrt{m^2c^4 + p_2^2c^2} \; , \tag{9}$$

kde mc^2 je energie koule, která je v klidu. Dosazením za p z rovnice (**??**) a úpravou dostaneme:

$$\cos\beta = \frac{1}{p_1p_2}\left[m^2c^2 + \sqrt{(m^2c^2 + p_1^2)(m^2c^2 + p_2^2)} - mc\left(\sqrt{m^2c^2 + p_1^2} + \sqrt{m^2c^2 + p_2^2}\right)\right] \; . \tag{10}$$

Úhel rozptylu β je v relativistickém případě závislý na velikostech hybností p_1 a p_2, a tedy již neplatí, že se koule rozletí pod pravým úhlem. V případě, že rychlosti koulí jsou po srážce stejné ($p_1 = p_2 = p_0$), budou mít rovnice (**??**) resp. (**??**) tvar:

$$mc^2 + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = 2\sqrt{m^2c^4 + p_0^2c^2} \; , \tag{11}$$

resp.:

$$p^2 = 2p_0^2(1 + \cos\beta) \ . \tag{12}$$

Dosazením (**??**) do (**??**), úpravou a využitím vztahu pro relativistickou hybnost

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{13}$$

dostaneme pro úhel rozptylu:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{X+1}} \ , \tag{14}$$

kde

$$X = 2\frac{c^2 - v^2}{v^2}\left(\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2}} - 1\right) \ . \tag{15}$$

Úhel rozptylu tedy závisí na rychlosti dopadu částice. Nerelativistické přiblížení v jehož rámci jsme řešili úlohu v první části, můžeme získat z tohoto výsledku jako limitu pro $c \to \infty$:

$$\lim_{c\to\infty} X = 1 \ , \tag{16}$$

V nerelativistickém případě je tedy $\beta = 90°$.