

Úloha č. 5

Mechanický model ve fyzice mikrosvěta-molekula

- (a) Při počátečním oddálení atomů z rovnovážné vzdálenosti $\bar{r}$ o hodnotu Δr_0 vzroste potenciální energie soustavy o hodnotu $E_{p_0} = \frac{1}{2}k\Delta r_0^2$ a na atomy působí přitažlivá síla velikosti $F_p = k\Delta r_0$, která má takový směr, že způsobuje jejich navracení do rovnovážné polohy. Protože platí zákon zachování mechanické energie, mají atomy při průchodu rovnovážnou polohou minimální potenciální energii, ale maximální hodnotu kinetické energie. Z tohoto důvodu, přestože na ně nepůsobí žádná síla, pokračují vlivem setrvačnosti v pohybu. Mimo rovnovážnou polohu začne působit opět pružná síla, která brzdí pohyb atomů. Kinetická energie soustavy se v důsledku působení této síly zmenšuje a pružná potenciální energie soustavy opět vzrůstá. V okamžiku, kdy se pohyb atomů zastaví (kinetická energie je rovna nule), je potenciální energie soustavy maximální a dosáhne opět hodnoty $E_{p_0} = \frac{1}{2}k\Delta r_0^2$ jako na počátku. Celý děj se periodicky opakuje.
- (b) Závislost pružné síly na výchylce z rovnovážné polohy je znázorněna na obr. ??
Znaménko u síly a výchylky souvisí se směrem.

Obrázek 1: Graf závislosti pružné síly na výchylce z rovnovážné polohy.

- (c) Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$E_p + E_k = konst.$$

Při počátečním vychýlení atomů z rovnovážné polohy je kinetická energie soustavy $E_{k_0} = 0$ a potenciální energie soustavy $E_{p_0} = \frac{1}{2}k\Delta r_0^2$. Při průchodu rovnovážnou polohou je velikost potenciální energie nulová, tj. $E_{p_r} = 0$.

Platí

$$E_{k_0} + E_{p_0} = E_{k_r} + E_{p_r}$$

a odtud

$$E_{p_0} = E_{k_r},$$
$$\frac{1}{2}k\Delta r_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2.$$

Úpravou této rovnice obdržíme pro rychlost atomu v rovnovážné poloze

$$v = \Delta r_0 \sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Vzájemná rychlost atomů v rovnovážné poloze má velikost $2v$.

- (d) Závislost potenciální energie na Δr je znázorněna na obr. ??
Potenciální energie dosahuje minimální hodnoty v rovnovážné poloze ($\Delta r = 0$), jak je patrné z obr. ??.

Obrázek 2: Graf závislosti potenciální energie na výchylce z rovnovážné polohy.

(e) Pro frekvenci kmitů platí vztah

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Po jeho úpravě získáme pro tuhost pružiny

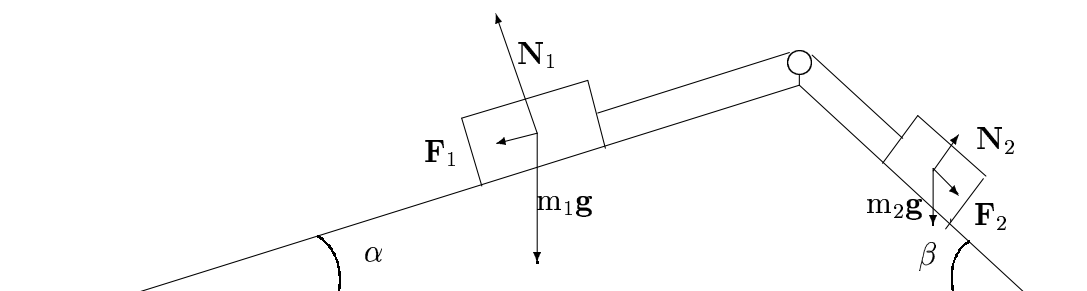
$$k = 2\pi^2 m f^2.$$

Dosazením hodnot $f = 1.32 \times 10^{14}$ Hz a $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg obdržíme výsledek

$$k = 574 \text{ Nm}^{-1}.$$

ÚLOHA č.6 – Vzorové řešení

- (a) Abychom mohli zdůvodnit platnost Stevinova zákona rovnováhy sil na nakloněné rovině, je třeba si uvědomit, že těleso ležící na nakloněné rovině je podrobeno vazbě, která povoluje pohyb jedině po této rovině. Zrychlení tělesa, a tedy i výslednice sil na ně působících, jsou rovnoběžné s nakloněnou rovinou. Tato výslednice $\mathbf{F}$ je vektorovým součtem tíhové síly $m\mathbf{g}$, jež na těleso působí zevně, a tlakové síly podložky $\mathbf{N}$, kolmé k nakloněné rovině. Platí $F = mg \cdot \sin \alpha$.



Soustava těles umístěných na nakloněných rovinách a spojených nějakým mechanickým způsobem je v rovnováze, pokud jsou si velikosti jejich průmětů tíhových sil rovny. Matematicky tuto skutečnost zapíšeme vztahem $F_1 = F_2$, kde

$$F_1 = G_1 \cdot \sin \alpha$$

$$F_2 = G_2 \cdot \sin \beta$$

(G_1 a G_2 jsou tíhové síly, α a β jsou úhly, jež svírají nakloněné roviny s vodorovným směrem)

Vztah přepíšeme do tvaru:

$$m_1 g \cdot \sin \alpha = m_2 g \cdot \sin \beta .$$

Nyní můžeme provést vyjádření poměru hmotností těles:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} .$$

Pokud jako v označíme společnou výšku nakloněných rovin ve směru svislém a jako a_1 a a_2 délky nakloněných rovin, můžeme psát: $\sin \alpha = \frac{v}{a_1}$ a $\sin \beta = \frac{v}{a_2}$, takže po dosazení dostáváme matematické vyjádření Stevinova zákona

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1}{a_2} .$$

Vzhledem k tomu, že hmotnost řetězu je rozložena pravidelně, je v případě na obr. a) zákon rovnováhy sil splněn pro libovolnou polohu řetězu. Pokud by tomu tak nebylo, řetěz by se pouze pootočil tak, aby se nastolila rovnováha. V žádném případě však nelze očekávat, že by došlo k jeho roztočení.

- (b) Tento případ je obdobou uspořádání na obr. a). Části řetězu mají sice rozdílnou hmotnost, ale pravá část řetězu je v jistém úseku svého průběhu svázána vazbami realizovanými otáčivými koly, která nepovolují pohyb přímo ve směru gravitačního pole. Výsledné síly působící na takto vázané dílky řetězu ve směru pohybu musí mít jako průměty gravitační síly menší velikost. Pravá část řetězu je tedy sice tvořena více dílky řetězu, ale nepřeváží část levou, neboť některé z jejich dílků jsou taženy menší silou úměrnou sklonu dráhy řetězu vůči gravitačnímu působení. Čím by pravá část řetězu byla delší vůči levé, tím by některé úseky její dráhy musely nabývat stále většího sklonu. K roztočení řetězu tedy nemůže dojít.
- (c) Předpokládaná činnost tohoto zařízení je založena na představě, že závaží na pravé straně jsou vzdálenější od osy otáčení a mají v gravitačním poli větší moment sil, který zapříčiní roztočení soustavy ve směru hodinových ručiček. Není ovšem vzata v úvahu skutečnost, že rozmístění závaží kolem osy otáčení je nerovnoměrné tak, že nadpoloviční část koulí se vždy nachází v levé části systému a zabraňuje tak převážení pravé strany a následnému roztočení. Zařízení se pouze natočí do rovnovážné polohy a v ní setrvá.

- (d) Zdůvodnění nefunkčnosti tohoto mechanismu, který zřejmě měl vykonávat nekonečný pohyb ve směru hodinových ručiček, lze opřít o stejné argumenty jako v případě (c).
- (e) Autoři tohoto perpetua mobile sice využívají kapilárních sil k "překonání" tíhové síly, ale dále již neuvažují, že stejné síly budou udržovat kapalinu v knotu a nepovolí jí stékat do horní nádoby.
- Kapalina by započala odkapávat z konce knotu pouze v případě "samospádu", tj. tehdy, kdy by se konec knotu v horní nádobě nacházel níže než počátek knotu. V tomto případě by se však kapalina nevracela do původní nádoby a cyklus by se neuzavíral, což je v rozporu s představami o způsobu práce perpetua mobile.
- (f) Zásadní rozdíl mezi perpetuem mobile a tímto důmyslným mechanismem spočívá ve skutečnosti, že mechanismu je dodávána z okolního prostředí energie. Jejím zdrojem jsou změny atmosférického tlaku okolního vzduchu. Systém není energeticky uzavřen a nelze ho označovat jako perpetuum mobile.
- (g) V případě těchto "věčných hodin" je nasnadě, že můžeme uvést stejné důvody, proč se nejedná o perpetuum mobile, jako v případě (f). Situace je odlišná pouze v tom, že zdrojem energie přijímané z okolí tentokrát nejsou výchyly atmosférického tlaku, ale kolísání teploty okolního vzduchu.
- (h) Toto perpetuum mobile využívá ke své činnosti vztakovou sílu. Ta je výslednicí tlakových sil šířících se kapalným prostředím rovnoměrně všemi směry.
- Při navrhování tohoto zařízení bylo počítáno s tím, že celkový vztlak bude napínat lano silou 60 000 N . Přitom bylo opomenuto, že duté krychle, aby pronikly do vodní věže, musejí překonat tlak 20 m vodního sloupce, který působí na metr čtvereční silou 200 000 N . Vztlkové působení tudíž není schopno vtáhnout krychli do věže a rozběhnout mechanismus.
- (i) Jak již bylo řečeno, vztlková síla je výslednicí elementárních tlakových sil, jimiž působí kapalina na povrch tělesa. Tlaková síla je však v každém bodě kolmá k povrchu bubny, míří tedy do jeho osy, takže její moment vzhledem k ose je nulový. K roztočení válce tedy nedojde.
- (j) V tomto případě bychom museli pracovat s dostatečně silným magnetem, který je schopen přemístit kuličku z bodu B do bodu C . Ta by se vrátila do výchozí situace B zřejmě za předpokladu, kdy by jí po propadnutí otvorem C na dané dráze bylo udělováno jediné tíhové zrychlení. Kulička ovšem po dopadu na dráhu N se nedostává z dosahu silového působení magnetu, takže na této dráze nemůže dosáhnout dostatečného zrychlení, jež by zajistilo její návrat do polohy B , a tak opakování cyklu.

Maximum získaných bodů...10

Pozn. Řada z Vás, řešitelů, se v některých úlohách dopouštěla opakovaných chyb plynoucích z nepochopení zadání či z neuvědomění si právě příčiny nefunkčnosti uvedených zařízení. K některým častějším chybám bych se zde chtěl vyjádřit:

Tření: Vliv tření nebyl u žádného z uvedených perpetuů mobile principiální záležitostí, tj. na něm nebylo možné založit zdůvodnění nefunkčnosti mechanismu. Mechanismy na obr. **a)** až **d)** se samy neroztočí ani v případě nulového tření. Pokud zařízením na obr. **a)** až **d)** udělíme na počátku impuls, dojde po čase k zastavení jejich činnosti vlivem tření, neboť žádný z nich nemůže vyrábět energii, jež by kompenzovala tento vliv.

Stevinův zákon: Někteří z Vás při jeho odvozování postupovali opačně; vyšli z platnosti Stevinova zákona, svazujícího poměr délek nakloněných rovin s poměrem hmotností těles na nich, a došli k rovnosti velikosti silových složek působících ve směru nakloněných rovin, místo aby takto matematicky vyjádřenou podmínku rovnováhy vzali jako výchozí skutečnost, z níž vyplyne platnost Stevinova zákona.

Vztlak: Tlak se šíří v kapalném prostředí stejnoměrně všemi směry, a tak výsledná tlaková síla je v daném bodě povrchu ponořeného tělesa na něj vždy kolmá. Vztlaková síla nemá jiný fyzikální původ než tlaková. Jako vztlakovou sílu označujeme výsledné silové působení kapaliny na vnořené těleso, které dostáváme, když integrujeme přes všechny tlakové síly.

Magnet: Zřejmě by bylo možné situaci na obr. **j)** uspořádat tak, aby magnet svým silovým působením přitáhl kuličku natrvalo k sobě. Ovšem tak, jak byla úloha formulována, se spíš předpokládalo, že se zamyslíte nad tím, proč kulička po propadení nenabude dostatečné energie k tomu, aby se po smyčce mohla dostat zpět do výchozí polohy.

Řešení úlohy č. 3

a) Hybnost tělesa je dána součinem jeho hmotnosti a rychlosti. Zákon zachování hybnosti má tedy v našem případě tvar

$$m\vec{v} + M\vec{V} = m\vec{u} + M\vec{U} \quad (1)$$

Kinetická energie tělesa je dána vztahem $E = \frac{1}{2}mv^2$. Zákon zachování kinetické energie tedy zní

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MU^2. \quad (2)$$

b) Zvolme osu x ve směru spojnice obou koulí a směřující doprava. Protože vektory $\vec{v}$, $\vec{V}$, $\vec{u}$, $\vec{U}$ v této ose leží, je každý z nich určen jedinou souřadnicí. Označme $\vec{v} = (v_x)$, $\vec{u} = (u_x)$, $\vec{V} = (V_x)$, $\vec{U} = (U_x)$. Znaménko těchto souřadnic je kladné, resp. záporné, směřuje-li příslušná rychlost doprava, resp. doleva. Úpravou rovnic (??) a (??) dostáváme

$$m(v_x - u_x) = M(U_x - V_x) \quad (3)$$

$$m(v_x^2 - u_x^2) = M(U_x^2 - V_x^2) \quad (4)$$

$$m(v_x - u_x)(v_x + u_x) = M(U_x - V_x)(U_x + V_x) \quad (5)$$

Je zřejmé, že rovnicím (??) a (??) vyhovuje řešení $u_x = v_x, U_x = V_x$. To jsou však rychlosti koulí před srážkou jsou tudíž pro nás nezajímavé. Po vyloučení tohoto řešení můžeme rovnice vzájemně vydělit a dostáváme

$$v_x + u_x = V_x + U_x \quad (6)$$

Řešením soustavy lineárních rovnic (??) a (??) dostáváme snadno vztahy pro rychlosti koulí po srážce

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{2MV_x + (m - M)v_x}{m + M} \\ U_x &= \frac{2mv_x + (M - m)V_x}{m + M}. \end{aligned} \quad (7)$$

Označme v, V, u, U velikosti vektorů $\vec{v}, \vec{V}, \vec{u}, \vec{U}$. V první situaci na obr. 4 v zadání úlohy je $v_x = v, V_x = -V$. Pak

$$u_x = \frac{-2MV + (m - M)v}{m + M} \quad U_x = \frac{2mv + (m - M)V}{m + M}. \quad (8)$$

Druhé situaci odpovídá zápis $v_x = v, V_x = V$. Pak

$$u_x = \frac{2MV + (m - M)v}{m + M} \quad U_x = \frac{2mv + (M - m)V}{m + M}. \quad (9)$$

c) Speciální případy:

- $m = M, \quad v > V$

$$(??): \quad u_x = -V, \quad U_x = v$$

$$(??): \quad u_x = V, \quad U_x = v$$

V obou situacích je tedy $\vec{u} = \vec{V}, \vec{U} = \vec{v}$. Koule si „vymění“ rychlosti (po srážce bude mít první koule stejnou rychlost, jakou měla druhá před srážkou, a naopak). Předpoklad $v > V$ je nutný ve druhé situaci, kdy koule vlevo dohání kouli vpravo. V opačném případě by k srážce nedošlo.

- $m \neq M, \quad v = V$

(??):

$$u_x = \frac{m - 3M}{m + M}v, \quad U_x = \frac{3m - M}{m + M}v$$

Z těchto výrazů plyne, že pro $m < \frac{M}{3} < 3m$ se po srážce budou obě koule pohybovat opačnými směry než původně. Pokud podmínka nebude splněna, budou se obě koule pohybovat ve směru původního pohybu těžší koule.

$$(??): \quad u_x = v, \quad U_x = V \quad \implies \quad \vec{u} = \vec{v}, \quad \vec{U} = \vec{V}$$

Tento výsledek je pochopitelný, neboť ke srážce koulí nedošlo.

- $m = M, \quad V = 0$

Obě situace na obr. 4 jsou ekvivalentní.

$$(??), (??): \quad u_x = 0, \quad U_x = v, \text{ tj. } \vec{u} = \vec{0}, \quad \vec{U} = \vec{v}.$$

První koule se při srážce zastaví, druhá koule se dá do pohybu stejnou rychlostí, kterou měla první koule před srážkou.

- $m \ll M, \quad V = 0$

Obě situace na obr. 4 jsou ekvivalentní.

(??), (??):

$$u_x = \frac{m - M}{m + M}v = \frac{\frac{m}{M} - 1}{\frac{m}{M} + 1}v \doteq -v$$

$$U_x = \frac{2mv}{m + M} = \frac{2m}{M \left(\frac{m}{M} + 1 \right)}v \doteq \frac{2m}{M}v \approx 0$$

Jestliže je tedy druhá koule o mnoho těžší než první, po odrazu od ní druhá koule odskočí skoro stejnou rychlostí, s jakou přiletěla. Větší kouli tedy předá pouze nepatrnou část své energie.

A nyní k vašim řešením. Mnoho z vás si s problémem řešení soustavy dvou rovnic, z nichž jedna je druhého řádu, poradilo snadno. Někteří jste dosadili z (1) do (2) a řešili kvadratickou rovnici, jiní jste provedli úvahu uvedenou v tomto vzorovém řešení. Někteří z vás si však neuvědomili, že je třeba využít *obou* zákonů zachování, a nedostali proto správný výsledek. Velice pěkné řešení měl Štefan Porubský, jehož úvaha byla ekvivalentní s řešením úlohy v soustavě spojené se společným těžištěm obou koulí a který se tak vyhnul řešení kvadratické rovnice.

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/96

Prvá série úloh

Úloha č.4

Řešení:

Úkolem je určit periodu oběhu elektronu kolem jádra atomu vodíku (protonu). Uvažujeme přitom o klasickém, tzv. planetárním, modelu a předpokládáme, že se elektron pohybuje kolem protonu po kruhové trajektorii. Vzhledem k velké hmotnosti protonu ve srovnání s hmotností elektronu ($\frac{m}{M} = 6 \cdot 10^{-4}$) dále předpokládáme, že změna polohy protonu vlivem elektronu je zanedbatelná.

S protonem tedy lze spojit inerciální vztažnou soustavu. Jedinou silou působící na elektron je přitažlivá elektrostatická síla o velikosti

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

směřující neustále k protonu, tj. do středu kruhové trajektorie elektronu.

Zrychlení elektronu je tedy zrychlením dostředivým a má velikost

$$a_d = \frac{v^2}{R} \quad .$$

Podle 2. Newtonova zákona pak platí

$$ma_d = F \quad , \quad tj.$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m \frac{v^2}{R} \quad . \quad (10)$$

Rychlost elektronu je

$$v = \frac{2\pi R}{T} ,$$

kde $(2\pi R)$ je dráha jednoho oběhu elektronu a T je hledaná perioda oběhu. Úpravami (1) dostaneme

$$v^2 = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R m} .$$

Odtud získáme periodu oběhu elektronu kolem jádra :

$$T = \sqrt{\frac{16\pi^3 R^3 m \epsilon_0}{e^2}} = \frac{4}{e} \pi R \sqrt{\pi R m \epsilon_0} .$$

Po vyčíslení ($R = 5,29 \cdot 10^{-11} m$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$,
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2$) dostaneme hodnotu periody oběhu elektronu kolem jádra $T = 1,52 \cdot 10^{-16} s$.