

Vzorové řešení úlohy č.2 kategorie 2

Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené s jádrem, kterou vzhledem k mnohonásobně větší hmotnosti jádra vůči elektronu považujeme za inerciální.

Jádro působí na elektron:

-elektrostatickou silou o velikosti

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_b^2}$$

-gravitační silou o velikosti

$$F_g = \kappa \frac{mM}{r_b^2}$$

Obě tyto síly mají směr spojnice jádra a elektronu ($e = 1,60 \cdot 10^{-19} C$ je elementární náboj, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} kg$ je hmotnost elektronu, M je hmotnost jádra: pro vodík $M = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$, pro těžký vodík $M = 2,1,67 \cdot 10^{-27} kg$).

Protože výslednice je silou dostředivou (podle předpokladu úlohy koná elektron rovnoměrný kruhový pohyb kolem jádra), platí:

$$\frac{1}{r_b^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 + \kappa m M \right) = m \frac{v^2}{r_b}$$

kde $v = \frac{2\pi r_b}{T}$ je obvodová rychlost elektronu a T je hledaná perioda.

Po vyjádření

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m r_b}{\frac{1}{r_b^2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 + \kappa m M \right)}} \quad (1)$$

- V případě oběhu elektronu kolem jádra vodíku i jádra těžkého vodíku po vyčíslení zjistíme, že $(\kappa m M \approx 10^{-67} N \cdot m^2) \ll (\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 \approx 10^{-28} N \cdot m^2)$. Gravitační interakce je tedy zanedbatelná proti elektrostatické a vztah (1) přejde do tvaru

$$T = \frac{4}{e} \sqrt{\epsilon_0 m (\pi r_b)^3} \doteq 1,52 \cdot 10^{-16} s \quad (2)$$

Doba oběhu nezávisí na hmotnosti jádra.

Kdyby byla hmotnost elektronu dvojnásobná, dosadíme do vztahu (2) $2m$ místo m a máme

$$T' = \sqrt{2} \cdot T = \frac{4}{e} \sqrt{\epsilon_0 2m (\pi r_b)^3} \doteq 2,15 \cdot 10^{-16} s$$

- Jedná-li se o soustavu tvořenou neutrálními částicemi, položíme ve vztahu (1) $e = 0$ a dostaneme:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_b^3}{\kappa M}}$$

V tomto případě nezávisí perioda na hmotnosti obíhající částice.

Číselně: pro pohyb elektronu kolem jádra vodíku (resp. těžkého vodíku) je $T = 7,24 \cdot 10^{-16} s$ (resp. $T = 5,12 \cdot 10^{-16} s$).

Poznámka:

Řešení této úlohy se vesměs obešlo bez větších problémů, opět však zdůrazňujeme:

- vždy je třeba uvést, v jaké vztažné soustavě jste úlohu řešili
- nezapomínejte na správné zaokrouhlení číselných výsledků.

Vzorové řešení úlohy č.4, kategorie 2

- (a) Při prvním dotyku má kulička náboj q_1 a deska Q_1 . Součet obou nábojů je původní náboj Q (vyplývá ze zákona zachování náboje):

$$Q = Q_1 + q_1 \quad (3)$$

Při každém dotyku tvoří povrch kuličky a desky ekvipotenciální plochu:

$$\varphi_k = \varphi \quad (4)$$

Předpokládáme-li, že pro potenciál kuličky platí:

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} = \frac{q}{C_0} \quad (5)$$

a pro potenciál desky:

$$\varphi = \frac{Q}{2C} = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S} \quad (6)$$

kde C_0 je kapacita (osamoceně) kuličky a C je kapacita deskového kondenzátoru (tvrzení platí pouze přibližně a navíc za předpokladu, že vzdálenost desek kondenzátoru je mnohem větší, než poloměr kuličky), pak z podmínky konstantního potenciálu vyplývá:

$$q = \frac{C_0}{2C} \cdot Q \doteq 2\pi \cdot \frac{Rd}{S} \cdot Q \quad (7)$$

Při prvním dotyku bude:

$$q_1 = \frac{C_0}{2C} \cdot Q_1 \quad (8)$$

$$Q_1 = Q - q_1 \quad (9)$$

a kulička získá náboj:

$$q_1 = \frac{\frac{C_0}{2C}}{1 + \frac{C_0}{2C}} \cdot Q \doteq \frac{2\pi Rd}{S + 2\pi Rd} \cdot Q \quad (10)$$

- (b) Při dalším pohybu kuličky budeme předpokládat, že na ni působí pouze elektrické pole o intenzitě $\vec{E}_1$, které je v oblasti pohybu kuličky homogenní. Po prvním dotyku se kulička nabije záporným nábojem q_1 (8) a bude se vlivem konstantní síly:

$$\vec{F}_1 = q_1 \cdot \vec{E}_1 \quad (11)$$

pohybovat přímočaře rovnoměrně zrychleným pohybem k druhé desce. Při dotyku s kladně nabitou deskou předá kulička záporný náboj q_1 , zmenší velikost náboje na $Q - q_1$ a ten se rozdělí na kuličku q_2 a desku Q_2 podle (6) s indexem 2. Kulička po nabití kladným nábojem q_2 je elektrickým polem $\vec{E}_1$ přitažena k záporně nabitě desce a děj se opakuje až do vyrovnání nábojů na obou deskách (toto tvrzení platí s jistým omezením: kulička nemůže přenášet menší než elementární náboj).

- (c) Dobu prvního průletu kuličky s nábojem q_1 od záporně nabitě desky s potenciálem $-\varphi_1$ ke kladně nabitě desce s potenciálem $+\varphi$, jejichž vzdálenost je d , určíme ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$d = \frac{1}{2} \cdot a_1 t_1^2 \quad (12)$$

kde a_1 je velikost zrychlení kuličky, které určíme z II. Newtonova zákona a elektrické síly působící na kuličku (9):

$$a_1 = \frac{q_1}{m} \cdot E_1 \quad (13)$$

Náboj q_1 je dán vztahem (8) a velikost intenzity homogenního elektrického pole mezi deskami kondenzátoru je:

$$E_1 = \frac{U_1}{d} = \frac{\varphi - (-\varphi_1)}{d} = \frac{\varphi + \varphi_1}{d} \quad (14)$$

Potenciál kladně nabitě desky je: $\varphi = \frac{Q}{2C}$, potenciál záporně nabitě desky po oddělení kuličky s nábojem q_1 je: $\varphi_1 = \frac{Q_1}{2C}$, kde podle (6) a (7) je $Q_1 = \frac{Q}{1 + \frac{C_0}{2C}}$. Intenzita elektrického pole pak je:

$$E_1 = \frac{Q}{Cd} \cdot \frac{1 + \frac{C_0}{4C}}{1 + \frac{C_0}{2C}} \quad (15)$$

a velikost zrychlení kuličky:

$$a_1 = \frac{1}{m} \cdot \frac{C_0}{C} \cdot \frac{Q^2}{2Cd} \cdot \frac{1 + \frac{C_0}{4C}}{(1 + \frac{C_0}{2C})^2} \quad (16)$$

Doba prvního průletu kuličky je:

$$t_1 = \left(\frac{2d}{a_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2dC}{Q} \cdot \frac{1 + \frac{C_0}{2C}}{\sqrt{C_0(1 + \frac{C_0}{4C})}} \cdot \sqrt{m} \quad (17)$$

Po dosazení ze vztahu (4) a (5):

$$t_1 \doteq \frac{2\varepsilon_0 S}{Q} \cdot \frac{1 + 2\pi \cdot \frac{Rd}{S}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R(1 + \pi \cdot \frac{Rd}{S})}} \cdot \sqrt{m} \quad (18)$$

Poznámka: Při určování doby průletu t_n mezi $(n - 1)$ -ým a n -tým dopadem musíme zohlednit nenulovou počáteční rychlost kuličky:

$$d = \frac{1}{2}a_n t_n^2 + v_{n-1} \cdot t_n \quad (19)$$

- (d) Při řešení úlohy budeme postupovat zcela analogicky jako v bodě (a). Zaveďme nyní pro jednoduchost následující označení: $\epsilon = \frac{C_0}{2C}$.

Po 1. dotyku (tj. před prvním odrazem): $q_1 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot Q_1$ a $Q_1 = Q - q_1$.

Odtud:

$$Q_1 = Q \cdot \frac{1}{1 + \epsilon}$$

Po 2. dotyku (tj. po prvním odrazu) : $q_2 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot Q_2$ a $Q_2 = Q_1 - q_2$.

Odtud:

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{1}{1 + \epsilon}$$

Obecně:

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{1}{1 + \epsilon} \doteq \frac{S}{S + 2\pi R d} \quad (20)$$

Jde tedy o geometrickou posloupnost $(a_1, a_1 \cdot k, a_1 \cdot k^2, \dots)$ kde $a_1 = Q$ a $k = \frac{1}{1+\epsilon} \doteq \frac{S}{S+2\pi R d}$ s $k < 1$. Pro $(n + 2)$ -hý člen platí: $a_{n+2} = a_1 \cdot k^{n+1}$; jeho hodnota je rovna velikosti náboje na té z desek kondenzátoru, od níž se právě odrazila kulička, jež v tuto chvíli vykonala právě svůj n -tý odraz, tedy $(n + 1)$ -vý dotyk s deskami kondenzátoru. Nyní hledáme n tak, aby $a_{n+2} \leq \frac{Q}{2}$ (n je celé kladné číslo, větší než nula). Tedy:

$$\frac{Q}{2} \geq Q \cdot \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^{n+1} \quad (21)$$

Po úpravách dostaneme:

$$n \geq \frac{\log 2}{\log(1 + \epsilon)} - 1 \doteq \frac{\log 2}{\log(1 + 2\pi \cdot \frac{Rd}{S})} - 1 \quad (22)$$

- (e) Energie kondenzátoru je: $W = \frac{Q^2}{2C}$. Pro kondenzátor s kuličkou platí zákon zachování energie. Předpokládejme dále, že na kuličku nepůsobí jiné než elektrické síly. Kinetická energie kuličky těsně po n -tém odrazu je rovna součtu úbytků potenciální energie kuličky vzhledem k deskám kondenzátoru:

$$E_k = E_{p(n)} = (\varphi_0 + \varphi_2) \cdot q_1 + (\varphi_1 + \varphi_2) \cdot q_2 + \dots + (\varphi_{n-1} + \varphi_n) \cdot q_n \quad (23)$$

Poznámka: Ve výše uvedeném vztahu je φ_n resp. q_n velikost příslušného potenciálu resp. velikost náboje kuličky.

Zobecněním (6) získáme vztah pro náboj kuličky po celkově n -tém dotyku kuličky s deskami kondenzátoru:

$$q_n = \epsilon \cdot Q_n \quad (24)$$

Užitím (18),(22) a vztahu pro $(n + 1)$ -vý člen geometrické posloupnosti dostáváme (musíme si uvědomit, že náboj na desce kondenzátoru, stejně tak jako v bodě (d), po celkově n -tém dotyku kuličky s deskami kondenzátoru, je dán $(n + 1)$ -vým členem geometrické posloupnosti):

$$q_n = \epsilon \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^n \quad (25)$$

Zobecněním (4) a dosazením za Q_n z (22) a (23) získáme:

$$\varphi_n = \frac{Q_n}{2C} = \frac{Q}{2C} \cdot \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^n \quad (26)$$

Po dosazení (23) a (24) do (21) dostaneme:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \epsilon \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^i \left[\frac{Q}{2C} \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^{i-1} + \frac{Q}{2C} \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right)^i \right] \quad (27)$$

Užitím vzorce pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti:

$$s = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k} \quad (28)$$

kde a_1 je první člen řady a k její kvocient, získáme konečný výsledek:

$$E_k = \frac{Q^2}{2C} \left[1 - \frac{1}{(1 + \epsilon)^{2n}} \right] \quad (29)$$

kde: $\epsilon = \frac{C_0}{2C} \doteq 2\pi \cdot \frac{Rd}{S}$.

Poznámka: Pro $n \rightarrow \infty$ je $E_k = \frac{Q^2}{2C}$. Kondenzátor se tedy zcela vybije a veškerá jeho elektrostatická energie je takto přeměněna na kinetickou energii kuličky.

loha ť. 1

- (a) Elektrostatická a gravitační interakce jsou obř centrální, tzn. síly přsobí ve smřru spojnice obou řástic. Velikost síly, kterou na sebe řástice navzájem přsobí, je v obou p řípadech nep římo řúmřrná řřtverci jejich vzdálenosti a p římo řúmřrná souřřtinu hmotností (nábojř) obou interagujících řástic. Rozdřl mezi interakcemi spořřívá v tom, ře gravitační je vřřdy p řitařřlivá a projevuje se u v ech hmotn ch řástic, zatímco elektrostatická mřřř b ř odpudivá (p ř stejné polaritřř nábojř interagujících řástic) a projevuje se pouze mezi řásticemi s elektrick m nábojem.
- (b) Velikost gravitační síly mezi elektronem a protonem vypořřteme podle vztahu

$$F_g = \kappa \frac{mM}{r^2},$$

kde

$m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg je hmotnost elektronu,

$M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg je hmotnost protonu.

Velikost elektrostatické síly je dána vztahem

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^2},$$

kde

$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ je náboj elektronu,

$Q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ je náboj protonu.

Pro poměr obou sil platí

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m M}.$$

Po dosazení je poměr 2.3×10^{39} .

- (c) Má-li být poměr sil elektrostatické a gravitační roven jedné, musí být součin hmotností interagujících částic 2.3×10^{39} krát větší. Aby zůstala poměr hmotností protonu a elektronu zachován, musíme obě hmotnosti vynásobit stejným číslem n tak, aby n^2 bylo rovno 2.3×10^{39} , tj. $n = 4.8 \times 10^{19}$.

loha č. 1

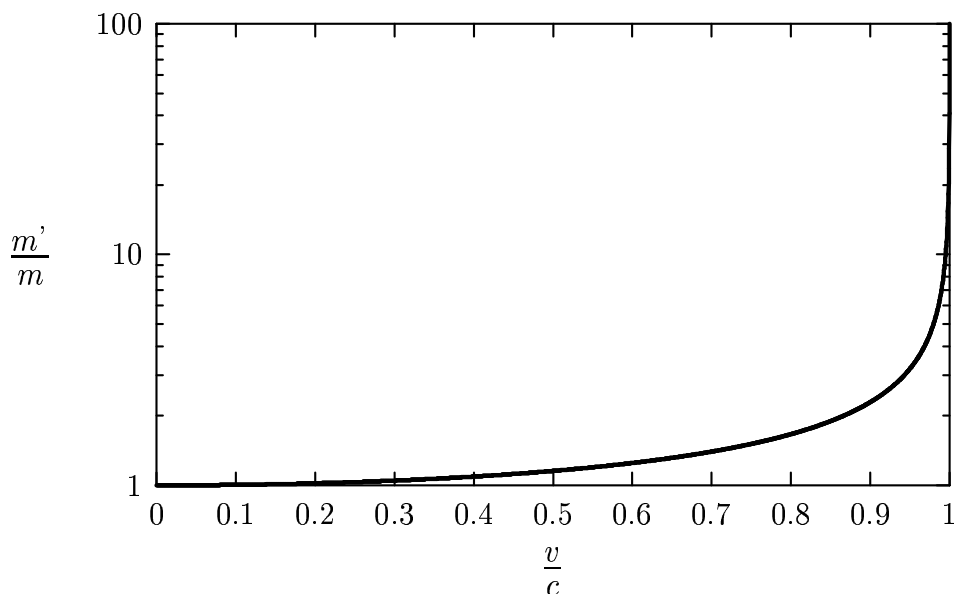
- (a) Tabulka by měla vypadat asi následovně:

	Objekt	Hmotnost v kg	Hmotnost v eV
Mikrosvět	Elektron	9.1×10^{-31}	5.1×10^5
Světlová	1/4lovka	70	-
			-
			-
Svět kosmických těles	Slunce	2×10^{30}	-
			-
			-

- (b) Jeden kilogram je definován hmotností mezinárodního prototypu, který je uložen v Mezinárodním úřadě pro váhy a míry v Sèvres ve Francii.

Jednotka hmotnosti	Vyjádření v kg
μg	10^{-9}
mg	10^{-6}
g	10^{-3}
q	10^2
t	10^3

- (c) Graf závislosti relativistické hmotnosti na rychlosti.



Aby byla hmotnost elektronu dvojnásobná (desetinásobná), musí být hodnota v raze $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ rovna dvřma (deseti). Odtud po jednoduché úpravě dostaneme pro hledanou rychlost $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ (popř. $0.3\sqrt{11}c$).

- (d) Dosadíme-li hmotnost v kg a rychlost světla v ms^{-1} , vyjde energie v jednotkách $\text{kg m}^2\text{s}^{-2} = \text{J}$ (joule). Pro elektron: $E_e = 8.2 \times 10^{-14} \text{ J} = 5.1 \times 10^5 \text{ eV}$.

ÚLOHA č.3 – Vzorové řešení

Na rovnoramenných vahách zjiřujeme hmotnost tělesa nepřímým způsobem. Ve skutečnosti nesrovnáváme hmotnosti, ale síly, jež na vážené těleso a závaží působí v homogenním gravitačním poli Země. Tělesa o stejné hmotnosti jsou sice přitahována stejnou gravitační silou G , jenže výsledek vážení je ovlivňován přítomností atmosféry. Plynné prostředí, stejně jako kapalně, působí na tělesa, do něj umístěná, vztlakovou silou řídící se *Archimédovým zákonem*. Vztlakové působení vzduchu je nepoměrně slabší než vztlakové působení vody, což plyne z malé hustoty vzduchu. Korek je ve vzduchu nadlehčován silou $F_1 = g \cdot \rho_v \cdot V_1$, kde $\rho_v = 1,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu, a závaží silou $F_2 = g \cdot \rho_v \cdot V_2$.

Pokud jsou váhy v rovnováze, platí: $G_1 - F_1 = G_2 - F_2$. Mají-li korek a závaží stejnou hmotnost, síly F_1 a F_2 nabývají rozdílných hodnot a rovnováha se nenastolí. K dosažení stavu rovnováhy musíme připustit možnost změny hmotnosti korku, která je jediným volným parametrem. Síla G_1 je přímo úměrná hmotnosti korku, síla F_1 na ní závisí nepřímo přes objem tělesa. Rovnici vyjadřující stav rovnováhy napíšeme ve tvaru:

$$(m + \Delta m) \cdot g - g \cdot \rho_v \cdot V_1 = m \cdot g - g \cdot \rho_v \cdot V_2.$$

Platí: $V_1 = \frac{m + \Delta m}{\rho_k}$ a $V_2 = \frac{m}{\rho_o}$ ($m = 1 \text{ kg}$), kde ρ_k je hustota korku ($\rho_k = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) a ρ_o je hustota oceli ($\rho_o = 7400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Z uvedeného vztahu dostáváme: $\Delta m = \frac{\rho_v}{\rho_o} \cdot \left(\frac{\rho_o - \rho_k}{\rho_k - \rho_v} \right)$. Po dosazení obdržíme: $\Delta m \doteq 6,3 \text{ g}$. Aby byl zachován stav rovnováhy, musí mít tedy korek hmotnost asi $1,0063 \text{ kg}$.

Dáno odlišnými hustotami korku a závaží, musí při jejich stejné hmotnosti platit $V_1 > V_2$, a tak $F_1 > F_2$. Korek je nadlehčován větší silou a rozdíl aerostatických vztlakových sil $\Delta F = g \cdot \rho_v \cdot \Delta V$ ($\Delta F = 6,1 \cdot 10^{-2} \text{ N}$) se "odečítá" od jeho tíhy. Váhy se vychýlí a korek bude tak mít zdánlivě menší hmotnost.

Při měření na Měsíci budou obě tělesa opět přitahována stejnou grav. silou, jejíž absolutní hodnota je ovšem vzhledem k menší gravitační přitažlivosti Měsíce, charakterizované menším grav. zrychlením, nižší. Vzhledem k tomu, že na Měsíci chybí atmosféra, nepůsobí zde žádný vztlak a na vahách srovnáváme čistě hmotnosti těles. Dostali bychom tedy odlišné výsledky. V prvním případě by korek převážil závaží, v druhém by se ustálila rovnováha.

ÚLOHA č.3 – Vzorové řešení

- (a) Jednou z hlavních charakteristik každého vodiče je, že se v něm mohou volně pohybovat nositelé elektrického náboje. Vodič se jeví z makroskopického hlediska jako neutrální, pokud v něm nějakým způsobem nevyvoláme nedostatek či přebytek elektronů, a tak ho nenabijeme. Elektrony jako náboje se stejným znaménkem se odpuzují, což je příčinou přerozdělovacího procesu, během něhož se volné elektrony vzájemně vzdalují, až se nakonec rozloží v tenké vrstvě při povrchu vodiče, což je stav s nejmenší potenciální energií systému. Odpudivá interakce mezi elektrony nedostačuje k tomu, aby mohly vystoupit z materiálu. Vektor elektrické intenzity musí být v elektrostatickém případě při povrchu vodiče k němu kolmý (tj. ve směru normály), protože přítomnost tečné složky intenzity by vyvolala proudění elektronů podél povrchu. Můžeme tedy říct, že povrch vodiče představuje jednu ekvipotenciálu.

Elektrony se přerozdělují podél povrchu vodiče do okamžiku, kdy je elektrické pole uvnitř vodiče ve všech místech kompenzováno vhodným vektorovým součtem příspěvků Coulombovského působení od jednotlivých elektronů. To je umožněno faktem, že velikost Coulombovské síly klesá právě s kvadrátem vzdálenosti nábojů. Nulové elektrické pole charakterizuje nulová výsledná intenzita $\mathbf{E} = 0$. V takovém případě je jediným možným řešením průběhu potenciálu uvnitř vodiče konstantní velikost $\varphi = \text{konst.}$ Hodnota potenciálu uvnitř vodiče je totožná s hodnotou na povrchu. Můžeme tedy tvrdit, že izolovaný nabitý vodič představuje ekvipotenciální oblast.

(b) Pakliže považujeme soustavu dvou vzdálených koulí spojených tenkým vodičem za jediný nabitý vodič, musí nutně platit: $\varphi_1 = \varphi_2$, kde φ_1 je potenciál na povrchu menší koule a φ_2 na povrchu větší koule. Následující postup se odvíjí od platnosti výše uvedené rovnosti. Víme, že $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ a $\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$. Tyto vztahy dosadíme do rovnosti a vyjádříme poměr nábojů. Dostáváme $q/Q = r/R$, tj. velikost přerozděleného náboje je přímo úměrná poloměru koule.

Platí též $\varphi_1 = E_r \cdot r$ a $\varphi_2 = E_R \cdot R$ a tedy $E_r/E_R = R/r$. Zde je závislost nepřímo úměrná. S nárůstem křivosti povrchu roste hodnota intenzity na něm (příčina destruktivních výbojů,..).

Vyjděme dále z definice kapacit: $C_1 = q/\varphi_1$, $C_2 = Q/\varphi_2$. Spojením a úpravou těchto výrazů dostáváme $C_1/C_2 = r/R$.

Druhá série úloh - 1. kategorie

Úloha č.5

Řešení :

Úkolem je diskutovat rovnováhu na rovnoramenných vahách v různých případech.

a) Na obou miskách jsou umístěny dvě naprosto stejné nádoby. V obou sahá hladina kapaliny do výšky h a v jedné plave kus dřeva.

Pro rovnováhu je rozhodující tlaková síla, již působí jednotlivé nádoby na misky vah. Protože v obou nádobách sahá voda do stejné výšky, je tlak u dna nádoby, a tedy i příslušná tlaková síla, v obou případech stejná, a to bez ohledu na přítomnost plovoucího předmětu. Váhy jsou tedy v rovnováze.

b) Kousek dřeva, vložený do nádoby s vodou, již sice nepůsobí na miskou vah tlakovou silou přímo, velikost tlakové síly, již působí na miskou nádoba, se však zvýší o přírůstek daný zvýšením hladiny kapaliny po vložení dřeva. Tento přírůstek je roven právě tíze kousku dřeva. Na vahách zůstane zachován původní stav - rovnováha.

c) V popsaném případě dojde k porušení rovnováhy. Pravá miska klesne. Na obrácený pohár s vodou působí shora atmosférická tlaková síla, zdola pak tlaková síla odpovídající atmosférickému tlaku sníženému o hydrostatický tlak vody v poháru. Na levou miskou působí pohár silou o velikosti

$$F_L = mg \quad ,$$

(Aerostatické tlakové síly se navzájem kompenzují, vztlakovou sílu vzduchu působící na pohár zanedbáváme, m je hmotnost poháru.)

Na pravou miskou působí závěs silou o velikosti

$$F_P = mg + F_{AT} - (F_{AT} - V\rho g) \quad ,$$

kde V je objem vody v poháru, F_{AT} je síla odpovídající atmosférickému tlaku.

Je tedy $F_P > F_L$.

Voda z poháru nevyteče v důsledku působení atmosférického tlaku.

d) V případě, že by obě nádoby nebyly spojeny trubicí, vložním hranolu do vody by došlo k porušení rovnováhy a k poklesu levé misky. Pokud však voda vytlačena dřevěným hranolem odteče, tlaková síla, již působí nádoba na levou miskou se nezmění (viz. případ a)). Přeteče-li tato voda do pravé misky, dojde k porušení rovnováhy - pravá miska klesne.

Druhá série úloh - 2. kategorie

Úloha č.5

Řešení :

Úkolem je kvalitativně objasnit chování magnetických látek.

a) Střelka kompasu je permanentní magnet. Tento magnet je vystaven účinkům zemského magnetického pole a orientuje se ve směru zemských magnetických siločar. Severní pól střelky ukazuje na sever a jižní k jihu. Přitom jižní magnetický pól zemského magnetického pole leží v blízkosti severního pólu geografického a naopak.

b) Magnetismus a elektřina jsou dva závislé jevy, proto se často hovoří o elektromagnetismu. Všude, kde pozorujeme magnetismus, musí existovat i elektrický proud. Magnetismus materiálů bez zjevného vnějšího elektrického zdroje je vyvolán pohybem elektronů v jejich atomové struktuře. Nositeli elementárního magnetismu jsou tedy samotné elektrony. Například atom vodíku s jedním elektronem lze považovat za jakýsi elementární magnet. (Také samotné jádro je takovým elementárním magnetem, avšak s účinkem mnohonásobně menším než má "magnet" příslušný elektronu v obalu. Tento poměr je dán podílem hmotnosti elektronu a jádra.)

Ve většině látek se magnetismus jednotlivých elektronů v atomovém obalu kompenzuje. V magnetických materiálech (Fe, Co, Ni, Gd) však existují oblasti, ve kterých jsou elementární magnety shodně orientovány. Tyto oblasti jsou pozorovatelné i pod mikroskopem a říkáme jim domény. V nezmagnetovaném materiálu způsobuje chaotická orientace jednotlivých domén rušení jejich příspěvků k výsledné magnetizaci. Umístěním materiálu do vnějšího magnetického pole dojde ke zmagnetování - v uspořádání domén začne převažovat jeden směr (určený vnějším polem).

Trvalé magnety se zhotovují z tzv. magneticky tvrdých materiálů (např. tvrdá ocel). Magneticky měkké feromagnetické látky (např. měkké oceli, železo) lze zmagnetovat, ale po vyjmutí z vnějšího magnetického pole svoje magnetické vlastnosti ztrácejí. Magnetická tvrdost, či měkkost materiálu, je dána tvarem hysterezní smyčky.

c) Hřebíky se v magnetickém poli zmagnetují - náhodně orientované domény převezmou orientaci vnějšího magnetického pole. Hřebík se pak chová jako permanentní magnet a 'přiskakuje' k jinému magnetu, protože nestejnomenné magnetické póly se přitahují.

d) Magnety lze zbavit typických magnetických vlastností zahřátím nad tzv. kritickou (Curieovu) teplotu (pro železo např. 753°C). Magnetismus je totiž podmíněn prostorovým uspořádáním magnetických domén, které se s rostoucí teplotou narušuje.

Odmagnetování lze docílit i vložením látky do střídavého magnetického pole, které způsobí, že elementární magnety- domény, budou orientovány dvěma různými směry s rovnocenným zastoupením.

Druhá série úloh - 1. kategorie

Úloha č.6 - prémiová

Řešení :

Hmotnost tělesa lze stanovit i na nesprávných vahách, pokud je k dispozici sada správných závaží (a můžeme-li přitom použít dodatečných předmětů neznámé hmotnosti).

1. způsob

Jednu misku vah zatížíme libovolným předmětem těžším, než je vážené těleso. Na druhou misku vah přidáváme závaží, až jsou váhy v rovnováze. Pak na misku se závaží vložíme vážené těleso a odebereme tolik závaží, aby se obnovila narušená rovnováha. Hmotnost odstraněných závaží je pak rovna hmotnosti tělesa, které je nyní nahrazuje na téže misce.

2. způsob

Těleso, jehož hmotnost se má určit, položíme na jednu misku vah. Na druhou sypeme např. písek, dokud nejsou váhy v rovnováze. Potom odebereme vážený předmět a na jeho místo klademe závaží, dokud se rovnováha neobnoví. Pak je hmotnost závaží rovna hmotnosti tělesa, které jimi bylo nahrazeno.

3. způsob

S nesprávností (s nerovnoramenností) vah se lze vypořádat i metodou dvojího vážení, kdy na levou misku klademe vážené těleso (hmotnosti m), na pravou závaží (hmotnosti m_1), až dosáhneme rovnováhy. Vážení opakujeme s tělesem na pravé misce, se závaží na levé (hmotnost m_2). Hmotnost tělesa pak určíme jako geometrický průměr hmotnosti závaží v obou případech. Označíme-li délku levého ramene vah l_1 , pravého l_2 , pak rovnice rovnováhy na vahách v uvedených případech mají tvar :

$mgl_1 = m_1gl_2$, resp. $m_2gl_1 = mgl_2$, odkud $\frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m}$, a pak správná hmotnost tělesa $m = \sqrt{m_1m_2}$.

S nesprávným závažím, byť i na správných vahách, se hmotnost tělesa určit nedá. Nesprávná závaží jsou totiž také tělesa neznámé hmotnosti a bez patřičného ocejchování jsou zcela k nepotřebě.

Druhá série úloh - 1. kategorie

Úloha č.6 - prémiová

Řešení :

Hmotnost tělesa lze stanovit i na nesprávných vahách, pokud je k dispozici sada správných závaží (a můžeme-li přitom použít dodatečných předmětů neznámé hmotnosti).

1. způsob

Jednu miskou vah zatížíme libovolným předmětem těžším, než je vážené těleso. Na druhou miskou vah přidáváme závaží, až jsou váhy v rovnováze. Pak na miskou se závažím vložíme vážené těleso a odebereme tolik závaží, aby se obnovila narušená rovnováha. Hmotnost odstraněných závaží je pak rovna hmotnosti tělesa, které je nyní nahrazuje na téže misce.

2. způsob

Těleso, jehož hmotnost se má určit, položíme na jednu miskou vah. Na druhou sypeme např. písek, dokud nejsou váhy v rovnováze. Potom odebereme vážený předmět a na jeho místo klademe závaží, dokud se rovnováha neobnoví. Pak je hmotnost závaží rovna hmotnosti tělesa, které jimi bylo nahrazeno.

3. způsob

S nesprávností (s nerovnoramenností) vah se lze vypořádat i metodou dvojího vážení, kdy na levou miskou klademe vážené těleso (hmotnosti m), na pravou závaží (hmotnosti m_1), až dosáhneme rovnováhy. Vážení opakujeme s tělesem na pravé misce, se závažím na levé (hmotnost m_2). Hmotnost tělesa pak určíme jako geometrický průměr hmotnosti závaží v obou případech. Označíme-li délku levého ramene vah l_1 , pravého l_2 , pak rovnice rovnováhy na vahách v uvedených případech mají tvar :

$mgl_1 = m_1gl_2$, resp. $m_2gl_1 = mgl_2$, odkud $\frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m}$ a pak správná hmotnost tělesa $m = \sqrt{m_1m_2}$.

Úpravou uvedeného výsledku však dostaneme :

$$m = m_2 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = m_2 + \frac{1}{2}(m_1 - m_2) = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

A je vidět, že v případě malé nerovnoramennosti ($m_1 \approx m_2$), lze skutečnou hmotnost tělesa určit jako aritmetický průměr dvojího vážení.

S nesprávným závažím, byť i na správných vahách, se hmotnost tělesa určit nedá. Nesprávná závaží jsou totiž také tělesa neznámé hmotnosti a bez patřičného ocejchování jsou zcela k nepotřebě.

Úloha č. 6

- (a) Když je pružina nenapjatá, jsou atomy v jejím materiálu v rovnovážných polohách a výslednice sil působící na každý atom je nulová. Potenciální energie atomů je minimální. V případě, že pružinu napínáme nebo stlačujeme, začnou se atomy vychylovat z rovnovážných poloh, jejich potenciální energie vzrůstá a atomy na sebe vzájemně působí silou, která má snahu vrátit atomy do rovnovážné polohy. Tato síla má původ převážně v elektromagnetické interakci, protože působení ostatních interakcí mezi atomy je zanedbatelně malé.
- (b) Při rozpouštění pružiny se musí každému atomu dodat energie potřebná na to, aby překonal zápornou potenciální energii a mohl se z materiálu uvolnit. U nenapjaté pružiny je hodnota této energie maximální, zatímco u stlačené je její velikost nižší. Celková energie soustavy rozpouštědlo-napjatá pružina se od energie soustavy rozpouštědlo-nenapjatá pružina liší o práci dodanou při stlačování pružiny. Tento rozdíl energií se po rozpuštění změní ve vnitřní energii kapaliny. V případě, že dojde k lokálnímu porušení pružiny a pružina praskne ještě před rozpuštěním, uvolní se zbývající pružná energie, pohyb pružiny se v kapalině třením utlumí a energie se opět přemění na vnitřní energii kapaliny. To může vést k jejímu zahřátí.

ÚLOHA č.4 - vzorové řešení

(a)

Uvažujme homogenní gravitační pole. Pak na všechna tělesa působí podle druhého Newtonova zákona gravitační síla o velikosti $F_g = mg$, kde g je gravitační zrychlení. Zavěsíme-li těleso o hmotnosti m na pružinu, pak toto těleso působí na pružinu silou F_g a zároveň pružina bude na těleso působit odporovou

silou, která má opačný směr vzhledem k F_g . Velikost této síly je možno vyjádřit pomocí vztahu $F_{odp} = ky$, kde y je výchylka pružiny z rovnovážného stavu a k je konstanta popisující mechanické vlastnosti dané pružiny tzv. tuhost pružiny. V rovnovážném stavu platí $F_g = F_{odp}$ z čehož po dosazení a úpravě dostáváme vztah:

$$m = \frac{k}{g}y$$

Na tomto lineárním vztahu je založen princip siloměru. Stupnice siloměru je obvykle ocejchována v newtonech. Pokud tedy budeme chtít zjišťovat siloměrem přímo hmotnost těles, je třeba provést ocejchování pružinové váhy v kilogramech. To je poměrně jednoduché a stačí nám k tomu obyčejná sada závaží. Podle typu siloměru (každý siloměr můžeme použít pouze do určité hmotnosti), zavěsíme na něj vhodné závaží (např. 5 kg) a označíme velikost výchylky. Pak už jen rozdělíme vzdálenost mezi počátečním stavem s nulovou výchylkou a změřenou výchylkou na odpovídající počet dílků (v uvedeném případě na pět dílků), abychom dostali stupnici v kilogramech. Hmotnost závaží, které použijeme pro ocejchování siloměru a také typ siloměru volíme podle požadované přesnosti měření.

(b)

Pokud nebudeme uvažovat vztakovou sílu a zároveň budeme uvažovat homogenní gravitační pole můžeme na jednotlivé otázky odpovědět zhruba takto:

- (a)** Je-li zdviž v klidu vůči povrchu Země působí na závaží zavěšené na pružinových vahách pouze gravitační síla. Proto siloměr v tomto případě ukáže hodnotu 1 kg.
- (b)** Je známo, že Newtonovy pohybové zákony platí stejně v tzv. inerciálních soustavách (jede o soustavy, které jsou vůči sobě buďto v klidu, nebo rovnoměrném přímočarém pohybu). Pohybuje-li se tedy zdviž libovolným směrem rovnoměrným přímočarým pohybem, pak hmotnost závaží bude stejná jako v případě, že je zdviž vzhledem k Zemi v klidu (tj. 1kg). (Na závaží ve zdviži působí opět pouze síla gravitační).
- (c)** Odpověď je stejná jako v případě (??).
- (d)** Bude-li se zdviž pohybovat se stálým zrychlením pak na těleso umístěné ve zdviži bude působit kromě síly gravitační F_g ještě síla setrvačná $F_s = ma$. Tato síla má vždy opačný směr než zrychlení. Označme m_Z hmotnost závaží v klidu, m_M hmotnost závaží kterou naměříme pomocí siloměru. Bude-li zdviž klesat platí pro velikost výslednice sil, kterou označme F_C vztah (viz. obr. č.1):

$$\begin{aligned} F_C &= F_g - F_s \\ m_M g &= m_Z g - m_Z a \\ m_M &= m_Z \frac{g-a}{g} \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme ($g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$) $m_M = 0,95 \text{ kg}$. V tomto případě tedy naměříme menší hmotnost než v případě, že zdviž je v klidu.

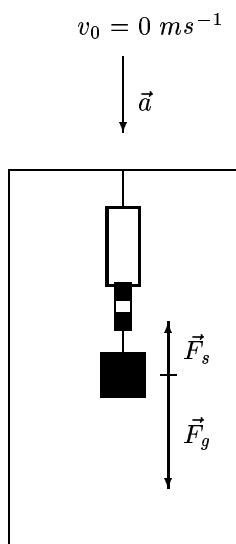
- (e)** Pohybuje-li se zdviž směrem nahoru se zrychlením o velikosti a , budou mít gravitační a setrvačná síla stejný směr. Postupně dostáváme (viz. obr. č.2):

$$\begin{aligned} F_C &= F_g + F_s \\ m_M g &= m_Z g + m_Z a \\ m_M &= m_Z \frac{g+a}{g} \end{aligned}$$

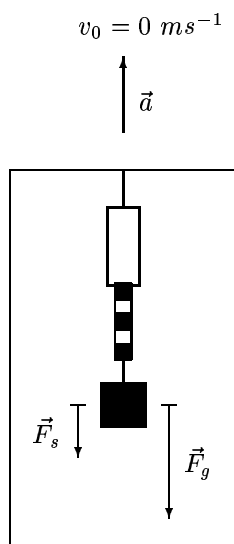
Po dosazení dostáváme $m_M = 1,05 \text{ kg}$. V tomto případě tedy naměříme větší hmotnost než v případě, že zdviž je v klidu. Mluvíme o tzv. přetížení.

- (f)** Jak bylo uvedeno již v případě (??), nezávisí výchylka siloměru na velikosti rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu. To jest je naprosto jedno, jestli je soustava v okamžiku, kdy se začne pohybovat se zrychlením, v klidu a nebo má jistou počáteční rychlost. Pokud zdviž klesá a přitom začne brzdit, působí zrychlení proti směru pohybu (viz. obr. č.3.) a tedy setrvačná síla F_s bude mít stejný směr jako síla gravitační F_g . Tento případ je tedy naprosto stejný jako případ (??).

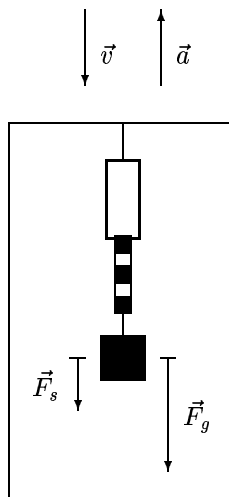
- (g) Pro tento případ platí do úvodu totéž jako v předchozím odstavci. Pokud zdviž stoupá a začne brzdít, působí zrychlení opět proti pohybu, (viz. obr. č.4.) a proto bude $\vec{F}_s$ mít opačný směr než $\vec{F}_g$. Tento případ je tedy naprosto stejný jako případ (??)
- (h) Padá-li zdviž volným pádem, pak platí $a = g$. Z výsledného vztahu v odstavci (??) ihned dostáváme, že $m_M = 0$ kg. Mluvíme o tzv. beztížném stavu.



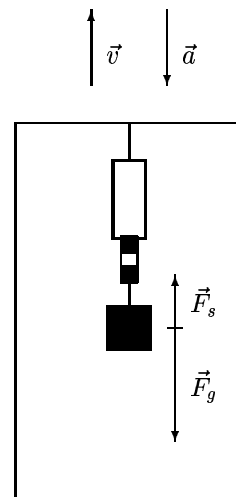
Obr. č.1



Obr. č.2



Obr. č.3



Obr. č.4

(c)

Jedna z možností jak zjistit hmotnost Země je měřením gravitačního zrychlení. Princip je zřejmý z následující úvahy. Pro velikost intenzity gravitačního pole na povrchu Země platí: $K = \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2}$ Intenzita gravitačního pole v daném místě se rovná gravitačnímu zrychlení, které v tomto místě uděluje tělesu gravitační síla. Tj. platí $K = g$. Úpravou dostaneme: $M_Z = \frac{g}{\kappa} R_Z^2$. Uvážíme-li, že $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ a $R_Z = 6378 \text{ km}$, můžeme M_Z určit měřením gravitačního zrychlení na povrchu Země. To lze provést např. měřením volného pádu vhodného tělesa ve vhodném prostředí.