

Vzorové řešení úlohy č.1 (5 bodů)

Vhodíme-li do nejmenšího válce krychli o hraně a hustoty ρ , bude zvětšení tlakové síly na dno válce dáno hmotností krychle $m = \rho a^3$, bez ohledu na to, zda krychle plave, či nikoliv.

Označme plochu dna i -tého válce S_i . Po vhození krychle dojde k poklesu válce o δh_i (vzhledem k $(i+1)$ válci) a zároveň se v $(i+1)$ válci zvedne hladina o

$$\delta y_i = \frac{S_i \delta h_i}{S_{i+1} - S_i} .$$

Hladina kapaliny v $(i+1)$ válci se vůči i -tému válci posune o

$$\delta d_i = \frac{m}{S_i \rho_{H_2O}} ,$$

kde $\rho_{H_2O} \doteq 1000 \text{ kgm}^{-3}$ je hustota vody.

Pro posun hladiny zároveň platí $\delta d_i = \delta h_i + \delta y_i$, tj.

$$\delta h_i = \delta d_i - \delta y_i = \frac{m}{S_i \rho_{H_2O}} - \frac{S_i \delta h_i}{S_{i+1} - S_i} ,$$

odtud

$$\delta h_i = \frac{m}{\rho_{H_2O}} \left(\frac{1}{S_i} - \frac{1}{S_{i+1}} \right) = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} a^3 \left(\frac{1}{S_i} - \frac{1}{S_{i+1}} \right) .$$

Celkový posun nejmenšího válce vůči zemi je součtem

$$h = \sum_0^N \delta h_i = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} a^3 \left(\frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_N} \right) ,$$

přitom plocha nádrže $S_N \gg S_0$ a tedy pro $\frac{1}{S_N} \rightarrow 0$ je

$$h = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} a^3 \frac{1}{S_0}$$

a tento výsledek platí pro případ hliníkové (a) i korkové (b) krychle.

Všimněme si, že výsledek nezávisí na přítomnosti válců s indexy $1, 2, \dots, N-1$.

Vzorové řešení úlohy č.1 (7 bodů)

a) Úkolem je porovnat optimální dráhu mezi mysem Dobré naděje a jižním pobřežím Austrálie v téže zeměpisné šířce s nejkratší spojnici daných míst na mapě.

Zeměpisné souřadnice mysu Dobré naděje jsou přibližně 34° j. š. a 19° v. d. Jižním pobřežím Austrálie prochází 34. rovnoběžka v blízkosti města Adelaide zhruba na 130° v. d.

Vzdálenost mysu Dobré naděje (A) od jižního pobřeží Austrálie (B) po 34. rovnoběžce je pak přibližně 110° zeměpisné délky.

Nechť S je střed Země. Nejkratší dráha mezi dvěma místy A, B je obecně oblouk tzv. hlavní kružnice se středem v bodě S, procházející body A, B. Poloměr této kružnice je $(SA) = (SB) = R = 6\,378\text{ km}$. Nejkratší dráha z A do B je pak

$$(AB)_{\min} = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi R = 9\,524\text{ km}.$$

Přitom α je úhlová vzdálenost (AB) po hlavní kružnici,

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{d}{2R}, \quad d = r \sin \frac{110^\circ}{2}.$$

Poloměr 34. rovnoběžky se středem v bodě C ležícím na zemské ose je $(CA) = (CB) = r = R \sin(90^\circ - 34^\circ) = R \sin 56^\circ \doteq 5\,288\text{ km}$. Tzn. vzdálenost obou míst (AB) po 34. rovnoběžce je $(AB) = \frac{110^\circ}{360^\circ} 2\pi r \doteq 11\,080\text{ km}$.

Rozdíl mezi optimální dráhou a vzdáleností po rovnoběžce je přibližně 1500 km.

Nejkratší dráhu lze na glóbusu vytýčit nití napnutou mezi danými body A, B.

Přesné znázornění povrchu koule na rovinu, aniž by došlo k narušení vzájemných vztahů mezi objekty, je nemožné. Existuje však řada mapových projekcí znázorňujících zemský povrch s minimální chybou (většinou odpovídají skutečnosti nějaké vybrané parametry – např. úhly, tvary).

Na běžné mapě se vzdálenost dvou bodů bere jako délka úsečky. Oproti skutečnosti je tento údaj zatížen zkreslením projekce. V našem případě vychází $(AB)_{\text{mapa}} \doteq 10\,700\text{ km}$ (na mapě v měřítku 1 : 100 000 000 je vzdálenost mysu Dobré naděje od jižního pobřeží Austrálie 10,7 cm).

Rozdíl mezi takto odečtenou vzdáleností a optimální dráhou je přibližně 1 000 km.

b) V Matematicko-fyzikálních tabulkách lze najít následující definice jednotlivých časů.

Pravý sluneční čas je hodinový úhel středu Slunce zvětšený o 12 h. Neboli pravý sluneční čas je dán úhlovým rozdílem mezi zvoleným poledníkem a pozicí Slunce. Pravým slunečním dnem pak označujeme dobu mezi dvěma po sobě následujícími spodními kulminacemi Slunce.

Vzhledem k nerovnoměrnosti "pohybu" Slunce (což je způsobeno nerovnoměrným pohybem Země po její mírně eliptické dráze), zavádí se pro praktickou potřebu střední sluneční čas – hodinový úhel myšleného středního Slunce, pohybujícího se rovnoměrně po nebeském rovníku zvětšený o 12 h. Střední sluneční den je doba mezi dvěma následujícími spodními kulminacemi středního Slunce (průměrná délka pravých slunečních dnů během roku).

Doba, za kterou Země vykoná jednu úplnou otáčku kolem své osy vzhledem k libovolné vzdálené hvězdě, je tzv. hvězdný den. Hvězdný den je přibližně o 4 min kratší než střední sluneční den. Země se totiž otáčí kolem osy v témže smyslu, v jakém obíhá okolo Slunce, a hvězdný den je pak kratší než střední sluneční. Za jeden rok se z těchto rozdílů nastřádá právě jeden den.

Hvězdný den se definuje jako doba mezi dvěma po sobě jdoucími horními kulminacemi jarního bodu a hvězdný čas je hodinový úhel jarního bodu.

Hvězdný i sluneční čas lze vztáhnout k libovolnému poledníku, v daném místě pak jde o místní čas.

Z praktických důvodů se neužívá časů místních, ale pásmových.

Od roku 1884 se poledník procházející hvězdárnou v Greenwichi volí jako základní a k němu příslušný střední sluneční čas se označuje jako čas světový. Svět je rozdělen do 24 časových pásem a všechna jednotlivá místa v daném pásmu se řídí pásmovým časem (zpravidla středním slunečním časem poledníku probíhající středem časového pásma).

Odpověď na otázku "Kolik je hodin ?" sděluje údaj odpovídající pásmovému času (případně tzv. smluvnímu času - letnímu). Na Moravě (v kontinentální Evropě) se např. používá pásmový čas – střední sluneční čas – vztahený k 15° v.d.

Je-li tedy např. v Brně 15 h, pak v Londýně je 14h, v Moskvě 16 h, v Tunisu je 15 h (leží ve stejném pásmu, jako Brno).

c) Uváděné členění do pásem podle zeměpisné šířky je umělé a ne zcela jednoznačné. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat např. severní polokouli.

I. pásmo, $0^{\circ} - 49^{\circ}$, Každých 24 hodin se normálně vystřídá den a noc. V létě je den delší než noc, v zimě naopak. Za astronomickou noc se považuje situace, kdy je Slunce (horní okraj slunečního kotouče) o místní půlnoci alespoň 18° pod obzorem. Uváděných 49° vyhovuje spíše pro spodní okraj slunečního kotouče, správný údaj je $48^{\circ}30'$.

II. pásmo, $49^{\circ} - 65^{\circ}30'$, V pásmu bílých nocí dochází okolo letního slunovratu ke splývání soumraků. Pro Brno ($49^{\circ}12'$) nastává období bílých nocí od 8.6. do 4.7. Udávaný interval zeměpisných šířek opět není zcela přesný, správně má být dolní mez $48^{\circ}30'$ a údaj horní meze by měl být o málo nižší.

III. pásmo, $65^{\circ}30' - 67^{\circ}30'$, V pásmu půlnočního slunce spodní část denní dráhy Slunce pod obzor vůbec neklesá, ale jenom po něm lehce klouže – nepřetržitý polární den (okolo 21. června)

IV. pásmo, $67^{\circ}30' - 83^{\circ}30'$, V pásmu černých nocí dochází ke splnutí úsvitu s večerním soumrakem, ne okolo půlnoci (jako ve II. pásmu), ale v poledne – černý den. Oblast černých dní je zároveň zemí půlnočního Slunce, ale v jiném ročním období. Kde v červnu Slunce nezapadá, tam v prosinci nevychází.

V. pásmo, $83^{\circ}30' - 90^{\circ}$, Období mezi letním a zimním slunovratem (22. červen – 22. prosinec) lze rozdělit na pět částí. V první období je neustálý den, v druhém se den střídá se soumrakem okolo půlnoci, ale úplná tma nenastává. Ve třetím období je stálý soumrak, který ve čtvrtém k půlnoci přechází v noc, a v pátém období panuje nepřetržitá noc.

Druhé pololetí má stejný průběh v opačném pořadí.

[Obrazovou dokumentaci ke střídání dne a noci lze najít ve školním Atlase světa.]
Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996
Čtvrtá série úloh - 2. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.6 (5 bodů)

Uvažme nejprve soustavu dvou rovnoběžných optických rozhraní s odrazivostmi R_1 , R_2 . Na první rozhraní nechť kolmo dopadá nekoherentní svazek světla o intenzitě I_0 . Ten se rozdělí na část odraženou o intenzitě $R_1 I_0$ a na část prošlou o intenzitě $(1 - R_1) I_0$, která postupuje k druhému rozhraní. Zde se odrazí část světla o intenzitě $(1 - R_1) R_2 I_0$ a projde $(1 - R_1)(1 - R_2) I_0$. Svazek odražený na druhém rozhraní se po dopadu na první

rozhraní opět dělí na prošlou a odraženou část; odražená část o intenzitě $(1 - R_1)R_1R_2I_0$ se dostane na druhé rozhraní, kde projde $(1 - R_1)(1 - R_2)R_1R_2I_0$, zbytek se vrací k prvnímu rozhraní... Sčítáme-li intenzity částí, které vychází druhým rozhraním ven ze soustavy, dostaneme

$$I = (1 - R_1)(1 - R_2)I_0 + (1 - R_1)(1 - R_2)R_1R_2I_0 + (1 - R_1)(1 - R_2)R_1^2R_2^2I_0 + (1 - R_1)(1 - R_2)R_1^3R_2^3I_0 + \dots,$$

což je geometrická řada s kvocientem $R_1R_2 < 1$, jejíž součet je

$$I = I_0 \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{1 - R_1R_2}$$

Propustnost soustavy dvou rozhraní je tedy

$$P_2 = \frac{I}{I_0} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{1 - R_1R_2} = \frac{P_1(1 - R_2)}{1 - R_2(1 - P_1)}, \quad (1)$$

kde symbolem P_1 jsme označili propustnost prvního rozhraní.

Nyní uvažme soustavu N rovnoběžných optických rozhraní s odrazivostí R , na první z nich nechť kolmo dopadá nekoherentní svazek světla o intenzitě I_0 .

Jedno rozhraní zřejmě propustí $(1 - R)I_0$. Označme P_k propustnost k rozhraní (tj podíl intenzity svazku vystupujícího z k - tého rozhraní a intenzity I_0 svazku dopadajícího na první rozhraní). Podle (1) můžeme při dosazení $R_2 = R$ psát

$$P_{k+1} = \frac{P_k(1 - R)}{1 - R(1 - P_k)},$$

odtud postupně vypočteme

$$P_2 = \frac{1 - R}{1 + R}$$

$$P_3 = \frac{1 - R}{1 + 2R}.$$

Matematickou indukcí snadno dokážeme, že

$$P_K = \frac{1 - R}{1 + (K - 1)R}.$$

Intenzita světla vystupujícího ze soustavy s N rozhraními je tedy

$$I = I_0 \frac{1 - R}{1 + (N - 1)R}.$$

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996

Čtvrtá série úloh - 1. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.6 - prémiová

Proč některé vesmírné objekty mají atmosféru a jiné nikoliv?

Odpověď na tuto otázku, podložená matematickými výpočty, není jednoduchá a přesahuje rámec soutěže, proto se omezíme jen na kvalitativní rozbor situace.

Aby molekula plynu nacházející se při povrchu homogenního kulového tělesa o poloměru R a hmotnosti M opustila jeho gravitační pole, musí mít rychlost větší nebo rovnou tzv. únikové rychlosti. Pro její velikost se dá odvodit vztah

$$v_u = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}},$$

kde $\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta. Po vyhledání příslušných údajů v MFChT zjistíme, že např. pro Zemi je $v_u = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, pro Merkur $v_u = 4,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, pro Měsíc $v_u = 2,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Z tzv. Maxwellova rozdělení molekul podle rychlostí (odvozuje se ve statistické fyzice) vyplývá, že vždy má určitý počet molekul rychlost větší než předem daná hodnota v . Tento počet závisí na teplotě plynu, hmotnosti molekul a samozřejmě na v .

Nyní již je zřejmé, že z plynné atmosféry jakéhokoliv složení (např. metan, kyslík, vodík, dusík, ...) neustále unikají molekuly, které mají rychlost větší nebo rovnou v_u . Jejich počet je dán hodnotou v_u (resp. R a M), teplotou plynu a hmotnostmi molekul.

Některé vesmírné objekty tedy nemají atmosféru proto, že veškeré molekuly plynu, které se kdy nacházely v blízkosti, unikly z jejich gravitačního dosahu.

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996

Čtvrté série úloh - 2. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.7 — prémiová

V řešení použijeme následující označení: krychle jsou číslovány *shora* 1, 2, 3, 4 ..., posunutí n -té krychle doprava vůči $(n+1)$ -ní krychli je označeno d_n (viz. obrázek).

(a) Podmínkou stability sloupce krychlí je, aby se vždy těžiště horních n krychlí nacházelo nad horní stěnou $(n+1)$ -ní krychle. Ideálním způsobem skládání krychlí je pak zřejmě ten, při kterém se těžiště soustavy horních n krychlí nachází právě nad pravou hranou horní stěny $(n+1)$ -ní krychle (pokud by bylo napravo od ní, krychle by spadly, pokud by bylo nalevo, mohli bychom krychle posunout napravo aniž by spadly, takže by to nebyla ideální poloha). Můžeme tedy postupovat induktivně: jedna krychle může přesahovat nejvýše o $\frac{a}{2}$, takže $d_1 = \frac{a}{2}$. Předpokládejme nyní, že se těžiště $n-1$ krychlí nachází nad pravou stěnou n -té krychle. Aby se těžiště n krychlí nacházelo nad bodem A (viz. obrázek), musí v souladu

s podmínkou momentové rovnováhy vůči bodu A platit:

$$\left(\frac{a}{2} - d_n\right) mg = d_n(n-1)mg \quad (2)$$

a tedy

$$d_n = \frac{a}{2n} \quad (3)$$

vzdálenost D je součtem všech d_n , takže pro sloupec z $N+1$ krychlí

$$D_{N+1} = \sum_{n=1}^N d_n = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad (4)$$

Harmonická řada

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

diverguje, takže můžeme pro dostatečně velké N dosáhnout libovolně velké hodnoty D .

(b) Budeme-li zde opět požadovat, aby se těžiště soustavy n krychlí a mouchy nacházelo nad pravou stěnou $(n+1)$ -ní krychle, dostaneme, opět užitím podmínky momentové rovnováhy, vztah

$$\left(\frac{a}{2} - d_n\right) mg = d_n((n-1)mg + m_0g) \quad (5)$$

a tedy

$$d_n = \frac{a}{2\left(n + \frac{m_0}{m}\right)} \quad (6)$$

Potom

$$D_{N+1} = \sum_{n=1}^N d_n = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n + \frac{m_0}{m}} \quad (7)$$

Řada

$$\frac{1}{1 + \frac{m_0}{m}} + \frac{1}{2 + \frac{m_0}{m}} + \frac{1}{3 + \frac{m_0}{m}} + \frac{1}{4 + \frac{m_0}{m}} + \dots$$

je stejně tak jako řada harmonická divergentní, takže i při libovolně těžké mouše můžeme stále dosáhnout libovolně velké vzdálenosti D .

(c) Zadání této části připouští dvě možné interpretace pojmu „rezerva“. Obě odpovídající varianty řešení byly při hodnocení považovány za správné:

(c1) Rezerva d znamená, že krychli umístíme od d nalevo od její ideální polohy určené v části (a). Pak označíme

$$d'_n = \frac{a}{2n} - d \quad (8)$$

a tedy

$$D_{N+1} = \sum_{n=1}^N d'_n = \sum_{n=1}^N \left(\frac{a}{2n} - d\right) = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - Nd \quad (9)$$

přičemž další krychle má smysl skládat pouze pokud $d'_n > 0$, což je podle (??) tehdy, je-li

$$n < \frac{a}{2d} \quad (10)$$

maximální dosažitelná vzdálenost $D_{\max}$ je pak

$$D_{\max} = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{a}{2d} - 1 \rfloor} \frac{1}{n} - \frac{a}{2} + d \quad (11)$$

pro zadané hodnoty je $D_{\max} \doteq 0,47$ m a požadované vzdálenosti $D' = 10$ m tedy není možné dosáhnout.

(c2) Rezerva d znamená, že sloupec n krychlí při umísťování na $(n+1)$ posuneme o d doleva oproti ideální poloze takto poskládaného sloupce. Protože těžiště $n-1$ krychlí je o d nalevo od pravé stěny n -té krychle, přejde vztah (??) na tvar

$$\left(\frac{a}{2} - (d_n + d)\right) mg = d_n(n-1)mg \quad (12)$$

a tedy

$$d_n = \frac{a - 2d}{2n} \quad (13)$$

a pak

$$D_{N+1} = \sum_{n=1}^N d_n = \left(\frac{a}{2} - d\right) \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad (14)$$

Vzdálenost D je tedy stále neomezená. Výsledek má samozřejmě smysl pouze pro $d < \frac{a}{2}$, pro větší d bude rezerva tak velká, že nám dovolí položit pouze jednu krychli. Užitím vztahu

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln(n) + \gamma \quad (15)$$

můžeme přibližně psát pro D_{N+1}

$$D_{N+1} = \left(\frac{a}{2} - d\right) (\ln(N) + \gamma) \quad (16)$$

chceme-li tedy dosáhnout vzdálenosti D' , musí potřebný počet krychlí $N+1$ splňovat vztah

$$\ln(N) = \frac{2D'}{a - 2d} - \gamma \quad (17)$$

potom

$$N = e^{\frac{2D'}{a-2d} - \gamma} \quad (18)$$

a výška takto vzniklého sloupce je pak

$$H = a(N+1) = a \left(e^{\frac{2D'}{a-2d} - \gamma} + 1 \right) \quad (19)$$

pro zadané hodnoty dostáváme $N \doteq 3,1 \cdot 10^{87}$ a tedy $H \doteq 3,1 \cdot 10^{86}$ m, což je podstatně (to jest o mnoho řádů) více než je velikost celého pozorovaného vesmíru. Když fyzikovi vyjde takovýto výsledek (a nejen tehdy), měl by se zamyslet, za jakých předpokladů platí to,

co spočítal, což bohužel většina z těch, kteří se k tomuto výsledku dopracovali, neučinila. Do sporu bychom se nejdříve dostali pravděpodobně s předpokladem homogenního gravitačního pole Země respektive konstantní hustotou vzduchu (řešení vůbec neuvažuje jeho vztahovou sílu). Zřejmě také není možné skládat krychle s přesností 10^{-88} m. Vidíme, že praxi bychom těžko dosáhli nějaké vzdálenosti D' řádově větší než je délka hrany krychle.

Poznámka k součtům řad:

Předpokládejme, že nekonečná řada je součtem tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$. Označme $s_N = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$ součet jejich prvních N členů (tzv. N -tý částečný součet). Pro harmonickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

platí $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$, $s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$, $s_{16} > 1 + \frac{4}{2}$, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $\dots$, $s_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$, $\dots$. Vidíme, že při rostoucím k rostou částečné součty nade všechny meze. (Tedy pro libovolně velké, předem zadané číslo A , lze najít vhodné k tak, aby $s_{2^k} > A$.)

Dále uvažme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a}, \quad a > 0$$

Označme jako m celé číslo, pro něž $m-1 \leq a \leq m$. Pak platí

$$\frac{1}{n+a} \geq \frac{1}{n+m}$$

Je-li tedy s_N N -tý částečný součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a}$$

a s'_N N -tý částečný součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}$$

pak platí také $s_N \geq s'_N$. Dokážeme-li, že rostou nade všechny meze částečné součty s'_N , platí totéž o součtech s_N .

$$s'_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \sum_{k=m+1}^{m+N} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{m+N} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = s_{m+N} - s_m$$

s_m je konečné číslo, s_{m+N} roste pro $N \rightarrow \infty$ nade všechny meze. Proto i s'_N roste nade všechny meze.

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996

Čtvrtá série úloh - 1. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.2 (5 bodů)

(a) Udělejme nejprve jisté zjednodušující předpoklady o šíření slunečního záření. Vzhledem k tomu, že vzdálenost Slunce od Měsíce je mnohonásobně větší než velikost obou těles, světelné paprsky dopadají na myšlenou rovinu procházející středem Měsíce a kolmo na osu spojující středy obou těles pod velmi malými úhly vůči této ose.

Berme, že všechny paprsky dopadají na zmíněnou rovinu kolmo. Pak, uvažujeme-li o Měsíci jako o dokonale kulovém tělese, sluneční paprsky ozařují nepřetržitě (s výjimkou zatmění Měsíce) polovinu jeho povrchu. Hranice mezi stínem a osvětlenou částí představuje průmět myšlené roviny s povrchem Měsíce a má tvar kružnice.

Měsíčních fází jsme svědky v důsledku oběhu Měsíce kolem Země vzhledem ke Slunci. Ze zemského povrchu sledujeme Měsíc (v periodě jednoho tzv. synodického měsíce) pod různými úhly vzhledem k Slunci, takže se vůči nám mění velikost plochy, z níž dopadá odražené sluneční světlo na Zemi. Ze Země viděná osvětlená plocha Měsíce se v daném okamžiku liší pro různá místa na Zemi, avšak odchylka od úhlu, v jehož vrcholu leží střed Země a který spolu svírají středy Měsíce a Slunce, je tak malá vzhledem k vzdálenostem, že ji není třeba uvažovat.

Jinak je tomu ovšem v případě pravidla o "couvání a dorůstání" Měsíce v závislosti na poloze na zeměkouli. Natočení Měsíce vůči povrchu Země určujeme vůči horizontu. Představme si, že v libovolném místě na Zemi sestrojíme nekonečnou rovinu tečnou k povrchu. Jak se zeměkoule otáčí kolem vlastní osy, protne myšlená rovina v jednu chvíli Měsíc. To je okamžik, kdy se Měsíc objevuje na horizontu zvoleného místa na Zemi. Roviny tečné k různým bodům na Zemi protínají Měsíc různě, což vnímáme jako rozdílné natočení Měsíce vůči horizontu. Uvedená pomůcka tedy není obecně platná, přibližně můžeme říct (přesně to platí jen když rovina oběhu Měsíce kolem Země prochází právě rovníkem), že zatímco na severní polokouli Měsíc "dorůstá", na jižní polokouli "couvá" a obráceně.

(b) Jak již bylo uvedeno v (a), má rozhraní stínu a světla na Měsíci kruhový průřez. Z geometrie je známo, že průmět kruhu do roviny pozorování, jejíž normála je o konečný úhel odkloněna od osy kruhu, představuje elipsu. Při pohledu ze Země se uplatňuje situace uvedená malířem B.

(c) Sílu vzájemného gravitačního působení dvou těles o hmotnostech m , M a vzdálenosti r vyjadřuje gravitační zákon

$$F = \kappa \cdot \frac{mM}{r^2} .$$

V našem případě

$$F_{ZM} = \kappa \cdot \frac{m_Z m_M}{d_{ZM}^2} \quad a \quad F_{SM} = \kappa \cdot \frac{m_S m_M}{d_{SZ}^2} ,$$

kde

$\kappa = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ je gravitační konstanta,

$m_S = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$ je hmotnost Slunce,

$m_Z = 5,976 \times 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnost Země,

$m_M = 7,351 \times 10^{22} \text{ kg}$ je hmotnost Měsíce,

$d_{SZ} = 1,496 \times 10^{11}$ m je střední vzdálenost Země (i Měsíce) od Slunce,

$d_{ZM} = 3,844 \times 10^8$ m je střední vzdálenost Měsíce od Země.

Po číselném dosazení obdržíme $F_{ZM} = 1,984 \times 10^{20}$ N a $F_{SM} = 4,359 \times 10^{20}$ N. Slunce tedy Měsíc přitahuje přibližně 2,2krát silněji než Země. Měsíc se udržuje na oběžné dráze kolem Země působením odstředivé síly, která vyrovnává gravitační přitažlivost. Matematický popis situace není jednoduchý s ohledem na to, že pohyb Měsíce kolem Země se děje po elipse. Obdobně soustava Země–Měsíc je unášena po elipsovité dráze kolem Slunce rychlostí vyvolávající odstředivou sílu udržující soustavu na její oběžné dráze.

Podobně jako se Měsíc nezhroutí na Zemi vlivem odstředivé síly působící v důsledku oběhu Měsíce kolem Země, nedojde ze stejných příčin ani k jeho pádu na Slunce, neboť soustava Měsíc–Země je unášena po oběžné dráze kolem Slunce střední rychlostí 29,77 km.s⁻¹, která vyvolává (po dosazení do vzorce pro odstředivou sílu při pohybu po kružnici) odstředivou sílu $F_{od} = 4,355 \times 10^{20}$ N držící Měsíc na oběžné dráze kolem Slunce. Je vidět, že i přes jistá zjednodušení dostáváme přibližnou rovnost sil F_{od} a F_{SM} .

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996

Čtvrtá série úloh - 2. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.2 (3 body)

Uvažovaný systém nádrží předpokládáme v rovnovážném stavu, tj. hladina vody v každé libovolné nádrži dosahuje po ustálení neměnné výšky h_i a v závislosti na čase tedy nedochází k jejímu přetečení přes okraj. Označme s_i rychlost proudění vody při hladině i -té nádrže, S_i plochu hladiny, v_i výtokovou rychlost vody a O_i průřez výtokového otvoru. Pak pro daný systém dostáváme Bernoulliovu rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{2}\rho v_i^2 + p_{atm} = \frac{1}{2}\rho s_i^2 + \rho g h_i + p_{atm} .$$

Uvažujeme-li proudění laminární, pak tento systém splňuje rovnici kontinuity (žádná voda se neztrácí). Pro i -tou nádrž ji zapíšeme ve tvaru

$$v_i \cdot O_i = s_i \cdot S_i = C ,$$

kde C je konstantou stejně velkou pro všechny nádrže systému. Dosazením do Bernoulliovu rovnice dostáváme

$$\frac{1}{2}\rho v_i^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{O_i}{S_i}\right)^2\right) = \rho g h_i .$$

Ze zadání pro všechny nádrže platí, že $O_i \ll S_i$ a tedy $(O_i/S_i)^2 \rightarrow 0$. Pak nám zjednodušený tvar Bernoulliovu rovnice dává $v_i = \sqrt{2gh_i}$. Po dosazení v_i do rovnice kontinuity máme

$$S_i \cdot \sqrt{2gh_i} = C .$$

Aby byl vztah splněn, musí být výška h_i v nádržích se stejně velkým výtokovým otvorem totožná. Pro výšku a hladiny ve spodní nádrži tedy platí $a = h_1$ a pro průtok vody P za sekundu

$$P = S_1 \cdot \sqrt{2gh_1} = S_N \cdot \sqrt{2ga} = C .$$

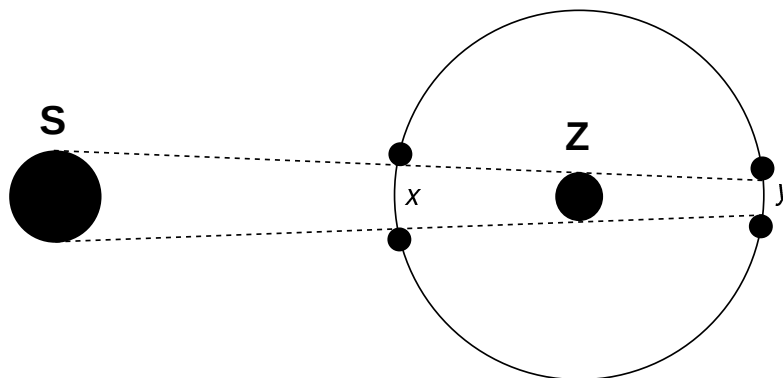
Známe-li tedy číselnou velikost S_1 a h_1 , jsme schopni určit jak výšku hladiny ve spodní nádrži, tak průtok vody systémem. Výsledek je tedy nezávislý na nádržích 2, 3, ..., $N - 1$.
Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996
Čtvrtá série úloh - 1. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.3 - (5 bodů)

Zatmění Slunce a Měsíce pozorovaná ze Země.

- (1) Zatmění Slunce jsou častější. V jednom roce může nastat nejvýše pět a nejméně dvě sluneční zatmění. Zatmění Měsíce mohou nastat v jednom roce nejvýše tři a v některých letech nenastávají zatmění Měsíce vůbec.

To, že jsou sluneční zatmění častější lze vysvětlit pomocí obr. ???. Na tomto obrázku je znázorněno Slunce (S), Země (Z) a Měsíc obíhající kolem ní. Zatmění Slunce nastane v případě, že se Měsíc nachází v úseku oběžné dráhy označeném x a zatmění Měsíce nastane v případě, je-li Měsíc v úseku označeném y . Protože je délka oblouku x větší než délka oblouku y je pravděpodobnost, že nastane zatmění Slunce větší, než pravděpodobnost, že nastane zatmění Měsíce.



Obrázek 1: Zatmění Slunce a Měsíce

- (2) Zatmění Slunce nastane, dopadne-li na povrch Země stín, který vrhá do prostoru Měsíc osvětlený Sluncem. Vrchol stínového kužele leží obvykle ve vzdálenosti jen o málo menší než je vzdálenost středu Měsíce od povrchu Země. Vzhledem k tomu, že vzdálenost Země Měsíc se mění (dráha Měsíce je eliptická), stává se, že vrchol stínu vrženého Měsícem dosáhne až k povrchu Země. Průměr měsíčního stínu na povrchu Země může dosáhnout nejvýše 270 km. U nás byla úplná zatmění Slunce pozorována v letech 1415 a 1706. Částečné zatmění Slunce u nás nastane 12. října tohoto roku.

Na rozdíl od zatmění Slunce probíhá zatmění Měsíce pro všechna pozorovací místa na zemském povrchu současně a je viditelné všude tam, kde je Měsíc v době zatmění nad obzorem. Úplné zatmění Měsíce, které bude u nás viditelné v celém svém průběhu, nastane 27. září 1996.

- (3) Rozdíl mezi zatměním Slunce na severní a jižní polokouli je pouze v tom, že na severní polokouli se Měsíc pohybuje po obloze zleva doprava, zatímco na polokouli jižní je tomu naopak. Proto také na severní polokouli zatmívá Měsíc Slunce zleva doprava a na jižní polokouli zprava doleva.

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996

Čtvrtá série úloh - 2. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.5 (4 body)

Lom světla na rozhraní dvou prostředí je možno popsat pomocí Snellova zákona

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha' \quad (20)$$

kde, α je úhel dopadajícího paprsku, α' je úhel paprsku lomeného (příslušné úhly měříme od kolmice dopadu), n je index lomu prvního prostředí a n' je index lomu druhého prostředí. Lomený paprsek leží v rovině dopadu, která je určena kolmicí dopadu a dopadajícím paprskem. V případě, že se paprsek šíří z opticky hustšího do opticky řidšího prostředí ($n < n'$), dochází k lomu od kolmice. V tomto případě při určitém úhlu $\alpha = \alpha_m$, který nazýváme mezním, je $\alpha' = 90^\circ$, takže

$$\sin \alpha_m = \frac{n'}{n} \quad (21)$$

pro $\alpha > \alpha_m$ nastává úplný odraz. Aby k úplnému odrazu nedošlo, musí platit

$$\frac{n}{n'} \sin \alpha < 1 \quad (22)$$

Nyní se už věnujme řešení úlohy (viz. obr. č.??). Označme α_i úhel pod kterým vychází paprsek z i -tého rozhraní. Na prvním rozhraní bude podle Snellova zákona (??) platit

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_0} \quad (23)$$

stejně tak na druhém rozhraní

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (24)$$

obecně na i -tém rozhraní

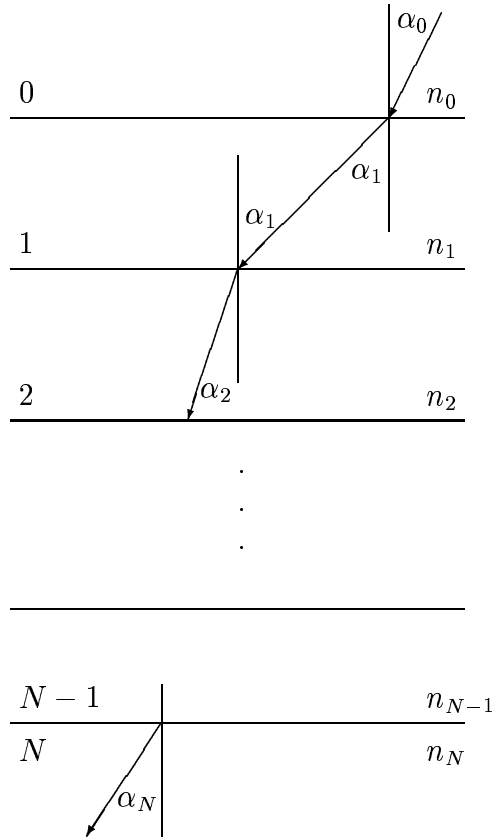
$$\frac{\sin \alpha_{i-1}}{\sin \alpha_i} = \frac{n_i}{n_{i-1}} \quad (25)$$

až na posledním rozhraní

$$\frac{\sin \alpha_{N-1}}{\sin \alpha_N} = \frac{n_N}{n_{N-1}} \quad (26)$$

Vynásobíme-li rovnice (??), (??), (??), (??), pak po úpravě dostaneme

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_N} = \frac{n_N}{n_0} \quad (27)$$



Obrázek 2: Optická rozhraní

Úhel α_N , pod kterým paprsek ze soustavy vychází, lze vyjádřit vztahem

$$\alpha_N = \arcsin \left(\frac{n_0}{n_N} \sin \alpha_0 \right) \quad (28)$$

Věnujme se nyní otázce, jaké musí být indexy $n_0, n_1, \dots, n_N$, aby na žádném rozhraní nedošlo k úplnému odrazu. Ze vztahu (??) plyne, že aby na i -tém rozhraní nedošlo k úplnému odrazu, musí platit

$$\frac{n_{i-1}}{n_i} \sin \alpha_{i-1} < 1, \quad (29)$$

kde za α_{i-1} můžeme dosadit ze vztahu (??), v němž položíme $N = i - 1$. Pak

$$\sin \alpha_{i-1} = \frac{n_0}{n_{i-1}} \sin \alpha_0. \quad (30)$$

Po jednoduché úpravě pak obdržíme podmínku:

$$n_i > n_0 \sin \alpha_0 \quad \forall i \quad (31)$$

kterou musí splňovat indexy lomu $n_0, n_1, \dots, n_N$, aby na žádném rozhraní nedošlo k úplnému odrazu.

Uvědomme si, že výsledek je stejný, jako při lomu světla přímo z prostředí s indexem lomu n_0 do prostředí s indexem lomu n_N , tj. nezávisí na prostředích $2, 3, \dots, N - 1$.

Vzorové řešení úlohy č.5 (5 bodů)

(a) Vzdálenosti hvězd

Jednotky délky v astronomii

- (1) **Metr** [m] je délka trajektorie, kterou proběhne světlo ve vakuu za $1/299792458$ sekundy.
- (2) **Astronomická jednotka** [$AU \doteq 149,6 \cdot 10^6$ km] je střední vzdálenost Země od Slunce. Používá se zejména ve sluneční soustavě a v soustavách dvojhvězd. Světelný paprsek urazí vzdálenost 1 AU za 499,004786 světelných sekund, což je přibližně 8,3 světelných minut. Určení 1 AU je ekvivalentní stanovení tzv. *rovníkové paralaxy Slunce*, což je úhel, pod nímž bychom viděli rovníkový poloměr Země ve střední vzdálenosti Země Slunce, kolmo k zornému paprsku. Dnešní hodnota astronomické jednotky je $149\,597\,892 \pm 5$ km.
- (3) **Světelný rok** [sv.r. $\doteq 9,46 \cdot 10^{12}$ km] je jednotka používaná ve stelární astronomii. Je to vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za 1 tropický rok (365d 5h 48min 45,7s). Rychlost šíření světla ve vakuu $c = 299\,793\,458$ ms⁻¹.
- (4) **Parsek** [pc $\doteq 3,08 \cdot 10^{13}$ km] je další jednotka používaná v astronomii. Ze vzdálenosti 1 pc bychom viděli poloměr zemské dráhy pod úhlem 1 obloukové vteřiny. To znamená, že těleso ve vzdálenosti 1 pc má roční paralaxu $\pi = 1''$. *Roční paralaxa* π hvězdy je malý úhel v trojúhelníku, ve kterém tvoří přeponu vzdálenost r hvězdy od Slunce a malou odvěsnu střední vzdálenost Země od Slunce. Platí:

$$\pi = \frac{1}{r}$$

Běžně se používají násobky parseku:

- (a) 1 kpc (kiloparsek) = 10^3 pc
- (b) 1 Mpc (megaparsek) = 10^6 pc
- (c) 1 Gpc (gigaparsek) = 10^9 pc

Vztahy pro přepočet těchto délkových jednotek používaných v astronomii jsou uvedeny v tabulce č. ??.

Určování vzdáleností hvězd

- (1) **Měřením paralaxy** je možno určovat vzdálenosti bližších vesmírných objektů. Jedná se o tzv. triangulační metodu (viz. obr. č. ??). Přemístí-li se pozorovatel z bodu A do bodu B úsečky o délce $2d$ orientované tak, že kolmice z bodu H, jehož vzdálenost D měříme, tuto úsečku půlí, změní se poněkud směr, v němž bod H pozorujeme.

Název	Zkratka	metr	astronomická jednotka	světelný rok	parsek
metr	m	1	$6,69 \cdot 10^{-12}$	$1,06 \cdot 10^{-16}$	$3,24 \cdot 10^{-17}$
astronomická jednotka	AU ¹	$1,49 \cdot 10^{11}$	1	$1,58 \cdot 10^{-5}$	$4,85 \cdot 10^{-6}$
světelný rok	sv.r. ²	$9,46 \cdot 10^{15}$	$6,33 \cdot 10^4$	1	$3,07 \cdot 10^{-1}$
parsek	pc ³	$3,08 \cdot 10^{16}$	$2,06 \cdot 10^5$	3,26	1

Tabulka 1: Tabulka pro převod jednotek používaných v astronomii

To se projeví jako zdánlivá změna polohy bodu H vůči vzdáleným objektům, jejichž změny poloh jsou zanedbatelné. Jestliže úhlový posuv objektu H na obloze je roven 2π , pak z elementární trigonometrie plyne

$$D = d \cotg \pi = \frac{d}{\pi},$$

neboť ve všech praktických případech je úhel π velmi malý a tedy $\cotg \pi = \frac{1}{\pi}$. Úhel π se nazývá paralaxou bodu H vůči úsečce AB. Tímto způsobem je možné zjišťovat vzdálenosti hvězd do vzdálenosti asi 100 pc. Koule tohoto poloměru obsahuje zhruba statisíce hvězd.

- (2) **Metoda statistické paralaxy** umožňuje měřit vzdálenosti hvězdokup měřením pozorovaných rychlostí jednotlivých hvězd. Pomocí ní je možno měřit vzdálenosti až do několika set parseků.
- (3) Známe-li pro daný objekt **absolutní hvězdnou velikost M** a samozřejmě i pozorovanou hvězdnou velikost m , lze pro vzdálenost D objektu v pc psát:

$$D = 10^{(1 + \frac{m-M}{5})}$$

Určování vzdálenosti dalekých objektů je prakticky ve většině případů založeno na tomto principu. V rámci naší Galaxie, lze odhadnout absolutní hvězdnou velikost na hlavní posloupnosti sestavením tzv. **barevného diagramu**. U extragalaktických objektů se pro odhad absolutní hvězdné velikosti s úspěchem používá **metoda cefeid**.

(a) Hvězdná velikost

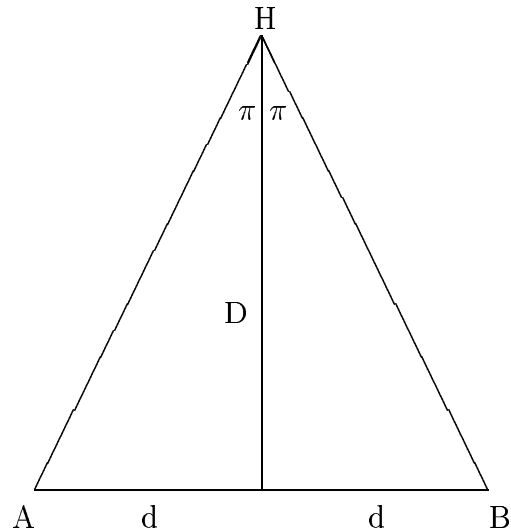
- (a) Ze zadání příkladu plyne, že $m \sim \log E$. Tedy $m_1 \sim \log E_1$ a $m_2 \sim \log E_2$. Z toho jednoduchou úpravou dostáváme výsledný vztah:

$$m_2 - m_1 \sim \log \frac{E_2}{E_1},$$

¹Název je zkratkou anglického astronomical unit

²Pro světelný rok se také používá zkratka l. y. (z anglického light year)

³Název vznikl ze slov paralaxa a sekunda, čili parsek (pc)



Obrázek 3: Paralaxa

- (b) Poměr vzdálenosti dvou hvězd H_1 a H_2 s rozdílem velikostí $m_1 - m_2 = 5$ a stejné svítivosti $I_1 = I_2$ lze odhadnout následující úvahou. Hvězda H_1 má vyšší magnitudu než hvězda H_2 , tj. pro osvětlení platí $E_1 < E_2$. Mají-li však obě hvězdy stejné svítivosti, nemůže z toho plynout jiný závěr, než že první hvězda se nachází ve větší vzdálenosti od naší sluneční soustavy.
- (c) Pogsonova rovnice se obvykle uvádí ve tvaru $m_2 - m_1 = 2,5(\log E_1 - \log E_2)$. Snadnou úpravou pro poměr osvětlení dostáváme: $\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$. Po dosazení dostáváme výsledek:

$$\frac{I_1}{I_2} = 478630.$$

Dle vztahů uvedených v zadání úlohy platí: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\Phi_1}{\Delta S}}{\frac{\Phi_2}{\Delta S}} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{4\pi I_1}{4\pi I_2} = \frac{I_1}{I_2}$. Takže po dosazení dostáváme stejný výsledek:

$$\frac{E_1}{E_2} = 478630.$$

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996
Čtvrtá série úloh - 2. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.3 - 4 body

Uvažujme nejprve dvě pružiny o tuhostech k_1, k_2 . Označme $\vec{F}$ sílu, kterou působíme na pružinu 2, $\vec{F}_{12}$ sílu, kterou působí pružina 1 na pružinu 2, $\vec{F}_{21}$ sílu, kterou působí pružina 2 na pružinu 1, a $\vec{F}_z$ sílu, kterou na první pružinu působí zeď. Protože v rovnovážném stavu jsou obě pružiny v klidu, musí výslednice všech sil působících na každou z nich být nulová

$$\vec{F} + \vec{F}_{12} = \vec{0}, \quad \vec{F}_{21} + \vec{F}_z = \vec{0}.$$

Dále musí podle třetího Newtonova zákona platit

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Z toho vidíme, že obě pružiny jsou natahovány silou o stejné velikosti F . Prodloužení jednotlivých pružin jsou pak

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad \Delta x_2 = \frac{F}{k_2}.$$

Pro celkové prodloužení systému pružin platí

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right).$$

Obě dvě pružiny zapojené za sebe se tedy chovají jako jedna pružina s tuhostí

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}.$$

Připojíme-li nyní další pružinu, můžeme s pružinami 1 a 2 počítat jako s pružinou jednou a provést opět stejnou úvahu, potom připojit další pružinu, pak další atd. až jich zapojíme N , výsledná tuhost přitom bude dána vztahem

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_N}}.$$

Úlohu je možné také řešit tak, že si napíšeme podmínky rovnováhy a třetí Newtonův zákon rovnou pro N pružin, tedy (podržíme-li se předchozího označení)

$$\vec{F}_{i-1,i} + \vec{F}_{i+1,i} = \vec{0} \quad \text{a} \quad \vec{F}_{i-1,i} = -\vec{F}_{i,i-1} \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, N,$$

kde $\vec{F}_{N+1,N} = \vec{F}$ a $\vec{F}_{0,1} = \vec{F}_z$ a opět vidíme, že všechny pružiny jsou napínány stejnou silou a z toho ihned plyne vztah pro výslednou tuhost.

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996

Čtvrtá série úloh - 2. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.4 - 4 body

Pro vyřešení této úlohy je důležité prostudovat rázy dvou stejně hmotných koulí. Předpokládejme tedy srážku dvou koulí o stejné hmotnosti m , z nichž jedna se pohybuje rychlostí $\vec{v}$ a druhá je v klidu. Ze zákona zachování hybnosti plyne

$$mv = mv' + mv_1,$$

kde

v je velikost rychlosti první koule po srážce,

v_1 je velikost rychlosti druhé koule po srážce.

Dále musí platit zákon zachování mechanické energie, která je v našem případě dána pouze energií kinetickou

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Z těchto dvou rovnic nyní odvodíme vztahy mezi rychlostmi před srážkou a po ní. Hmotnosti na obou stranách těchto rovnic se vykrátí a dostaneme soustavu dvou rovnic, ve které vystupují pouze rychlosti. Řešením této soustavy jsou následující relace

$$v' = 0, \quad v_1 = v.$$

Tím jsme dokázali, že po srážce dvou stejně hmotných koulí, z nichž jedna se pohybuje rychlostí v a druhá je v klidu, zůstane první koule v klidu, zatímco druhá koule se bude pohybovat stejnou rychlostí, jakou se pohybovala před srážkou první koule.

Pro naše zadání z tohoto poznatku plyne, že stejně hmotné koule $1 \dots N-1$ zůstanou po srážce v klidu. Má-li po srážce zůstat v klidu také koule s hmotností m_0 , musí platit $m_0 = m$. Poslední koule se bude potom pohybovat rychlostí v_0 , což plyne ze zákonů zachování.

Z řešení je patrné, že k více jak dvěma srážkám nedochází a předpoklad, že každá koule se srazí právě dvakrát, tedy není nutný.

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1995/1996

Čtvrtá série úloh - 1. kategorie

Vzorové řešení úlohy č.4 - (3 body)

Nalezení poměru třetí mocniny velké poloosy oběžné dráhy a a druhé mocniny příslušné oběžné doby T je jednoduché za předpokladu, že planeta o hmotnosti M_p obíhá po kruhové dráze kolem Slunce o hmotnosti M_S ve vzdálenosti r . V tomto případě je velikost velké poloosy rovna poloměru kružnice $a = r$.

Aby se planeta pohybovala po kružnici, musí platit, že velikost dostředivé síly se rovná velikosti síly gravitační

$$F_d = F_g$$

$$M_p \frac{v^2}{r} = \kappa \frac{M_p M_S}{r^2}, \quad (32)$$

kde

v je rychlost pohybu planety kolem Slunce,

$\kappa = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ je gravitační konstanta.

Rychlost pohybu planety po kruhové dráze je konstantní a platí

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \quad (33)$$

Dosazením za v do rovnice (33) obdržíme

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\kappa M_S}{4\pi^2} = 3.4 \times 10^{18} \quad (\text{SI}), \quad (34)$$

což je hledaný výsledek.

Dosazujeme-li v astronomických jednotkách $a=1\text{AU}$ a $T=1\text{rok}$, vyjde nám poměr roven 1. Je patrné, že hodnota tohoto poměru v našem modelu závisí pouze na hmotnosti Slunce.