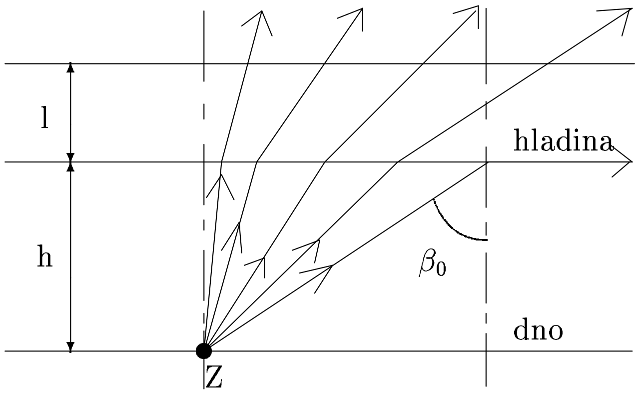
Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1996/1997
Prvá série úloh

Vzorové řešení úlohy č.5 (5 bodů)

(a) Než se omezíme na případ, kdy oko dítěte vidí kovový předmět ve směru kolmém na hladinu, představme si situaci v obecném případě. Kovový předmět v hloubce h považujeme za bodový zdroj, který vyzařuje odražené světlo do všech směrů. Paprsky se na rozhraní vody a vzduchu lámou tak, že splňují rovnici

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\ ,$$

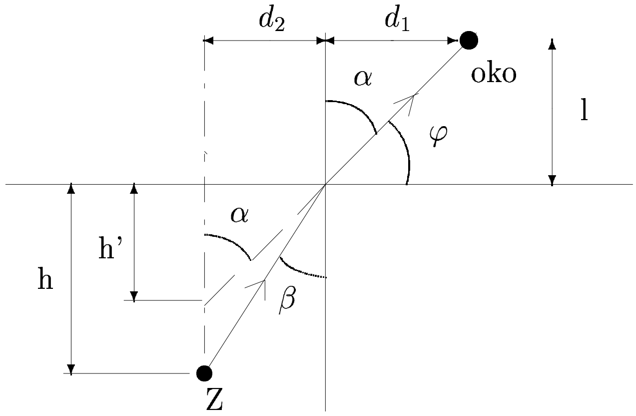
která vyjadřuje zákon lomu světla. Ten svazuje pro daná prostředí úhel dopadu s úhlem lomu. Pro libovolnou polohu oka ve výšce l nad vodní hladinou je vždy možné najít takovou kombinaci úhlů α a β, pro něž existuje dráha paprsku mířícího od předmětu do oka dítěte. Protože se paprsky lámou do prostředí opticky řidšího od kolmice, existuje mezní úhel $\beta = \beta_0 < 90^o$, pro který $\alpha = 90^o$ ($\Longrightarrow \sin\alpha = 1$). Mezní úhel splňuje rovnici $\sin\beta_0 = 1/n$ (viz obr. 1).



Obr. 1

Dráha paprsku se skládá ze dvou úseček. Jejich průměty do osy rovnoběžné s hladinou označme d_1 a d_2. Pak platí $\mathrm{tg}\,\alpha = d_1/l$ a $\mathrm{tg}\,\beta = d_2/h$. Oko vidí předmět pod úhlem α (měřeným od kolmice k hladině) a vnímá jej tedy ve zdánlivé hloubce h' v místě, kde se protíná předmětem procházející svislá osa s myšleným prodloužením paprsku šířícího se vzduchem (viz obr. 2). Matematicky vyjádřeno

$$h' = \frac{d_2}{\mathrm{tg}\alpha} = h \cdot \frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{h}{n} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\beta}\ .$$



Obr. 2

Položíme-li nyní $\varphi = 90^o$ ($\Longrightarrow \beta = 0^o$), dostáváme $h' = h/n$. To je hloubka, v jaké dětské oko vnímá předmět pod hladinou ve svislém směru. Výška oka nad hladinou výsledek neovlivňuje.

(b) V obecném případě se poloha zdánlivé hloubky mění dle výše uvedeného vztahu pro h', tzn. že zmenšujeme-li úhel φ, zdánlivá hloubka se blíží k nulové hodnotě.

Oko není bodovým detektorem, a tak současně vnímá signály přicházející z konečné úhlové oblasti $\varphi \pm \Delta\varphi$. Zdánlivá hloubka je funkcí úhlu pohledu, takže se pro jednotlivá φ liší. Výsledný obraz předmětu tedy není bodový; oko jej vnímá ve spojité množině hloubek h'. „Rozmazání“ obrazu je úměrné velikosti $\Delta\varphi$.

Jak je již zmíněno v bodě **(a)**, v našem případě existuje mezní úhel β_0. Paprsky šířící se pod úhlem $\beta \geq \beta_0$ se nelámou do druhého prostředí, ale odrážejí se na rozhraní zpět. Hovoříme o oblasti tzv. totálního odrazu. Sleduje-li dítě předmět pod úhlem $\varphi = 0^o$, tj. na úrovni hladiny, stává se pro ně neviditelným.

Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1996/1997
První série úloh

Vzorové řešení úlohy č.3 (5 bodů)

PŠi Šeen zadan lohy vyuvme dvou zkon optiky:
1. Svtlo se Š v homogennm prostŠed pŠmoaŠe, pŠiem svteln paprsky vystupuj ze zdroje vemi smry.
2. Dopadajc paprsek a paprsek odraenÀ od zrcadla svraj s kolmic k zrcadlu stejnÀ hel (zkon odrazu - viz obr. 3c zadn).

Dobrou pomckou pŠi konstrukci chodu paprsk je vytvoŠen zdnlivho obrazu lovka za zrcadlem, kterÀ je zrcadlov symetrickÀ s pŠedmtem vzhledem k rovin zrcadla. Odraen paprsky se potom snadno zkonstruuj podle obrzku 1.

Na obrzku je pro jednoduchost lovk (pŠedmt) schematicky znzornn ipkou. Pozorovatel vid pŠedmt v zrcadle celÀ, pokud mu paprsky vychzejc ze vech bod pŠedmtu dopadnou po odrazu zrcadlem do oka (obrzek 2).

a) Ji z konstrukce zdnlivÀch obraz lovka za zrcadly Z_1 a Z_2 je vidt, e zrcadlo Z_1 odr vechny paprsky vychzejc od lovka v mstnosti do stropu, take dnÀ pozorovatel na zemi neme obraz lovka vidt. Naopak zrcadlo Z_2 odr paprsky zpt do mstnosti, kde me pozorovatel obraz uvidt. PŠi konstrukci krajnch poloh oblasti, ve kterÀch se lovk nachz a me se jet celÀ vidt v zrcadle Z_2, postupujeme takto (viz obrzek 3). VytvoŠme si ps, kde se lovk v mstnosti nalz (ps Šky l) a k nmu zkonstruujeme zdnlivÀ obraz za zrcadlem. Prvn krajn poloha lovka $A'B'$ je urena tak, e bod A' le na kolmici $A'A'_2$ k rovin zrcadla, kter prochz hornm okrajem D zrcadla, nebo» paprsek vychzejc z vrcholu pŠedmtu (ipky) a dopadajc kolmo na zrcadlo se od zrcadla opt kolmo odr. Paprsek dopadajc pod jinÀm hlem se neodr do o stojcho lovka. I paprsek vychzejc z nohou lovka v tto prvn poloze se od zrcadla odr do o lovka. Pro nalezen druh krajn polohy AB vychzme z poadavku, aby paprsek vychzejc z paty lovka mu po odrazu ze spodnho okraje zrcadla C dopadl do oka (paprsek BCA). Do oka dopadne i zrcadlem odraenÀ paprsek z vrcholku hlavy, lovk se vid celÀ. Vzdlenost tto polohy od prav stny mstnosti x vypotme pomoc dvou pravohlÀch trojhelnk BFC a AEC, uitm nslednÀch goniometrickÀch vzorc

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta} \tag{1}$$

Z trojhelnku BFC dostaneme vztah pro x

$$x = h \cdot tg(45^o - \alpha) \tag{2}$$

Z trojhelnku AEC dostaneme vztah pro x

$$x = (h - l) \cdot tg(45^o + \alpha) \tag{3}$$

s vyuitm rovnosti

$$tg(45^o) = 1 \tag{4}$$

a nsledn pak

$$tg(45^o \pm \alpha) = \frac{1 \pm tg\alpha}{1 \mp tg\alpha} \tag{5}$$

Z rovnice (2) vyjdŠme

$$tg\alpha = \frac{h - x}{h + x} \tag{6}$$

a dosazenm do rovnice (3) dostaneme polohu druhho krajnho bodu

$$x = \sqrt{h(h - l)}. \tag{7}$$

Po dosazen selnÀch hodnot $x = 1,9m$.

b) Kdy lovk (pŠedmt) stoj v mstnosti mohou celÀ jeho obraz v zrcadle Z_2 vidt pozorovatel v urit sti mstnosti, jej hranice udvaj odrazy paprsk na okrajch zrcadla. VytvoŠme zdnlivÀ obraz za zrcadlem a zkonstruujeme paprsek vychzejc z vrcholu pŠedmtu a odraenÀ od hornho okraje zrcadla a obdobn pro paprsek vychzejc z paty pŠedmtu a odraenÀ od spodnho okraje zrcadla. Oblast polohy pozorovatele vidcho celÀ obraz lovka stojcho uprostŠed mstnosti je ohraniena podlahou, vÀkou pozorovatele a vÀe uvedenÀmi "okrajovÀmi" odraenÀmi paprsky. Umstn detektor, o pozorovatele, pŠedpokldme od podlahy mstnosti a do vÀky $2m$.

c) Zkonstruujme zdnliv obrazy lovka za obma zrcadly. PŠi kolmm dopadu paprsk, vychzejcch od lovka, na zrcadla Z_3 a Z_4, se paprsek odraz zpt k lovku, take v zrcadlech vid 2 sv obrazy. PŠi jinm hlu dopadu se paprsek odraz od zrcadla Z_3, dopadne na zrcadlo Z_4 od nho se odraz a mine oko lovka. lovk svj obraz neuvid. Svj dal obraz v zrcadle lovk uvid v rohu mstnosti, kde se zrcadla stÀkaj. PŠi dopadu paprsku ze zdroje na zrcadlo Z_3 v tomto bod, se paprsek odraz a dopadne na zrcadlo Z_4, ze kterho se odraz zpt k lovku. Podobn vahy plat pro paprsek odraenÀ nejprve na zrcadle Z_4 a pak na zrcadle Z_3. lovk uvid svj pŠevrcenÀ obraz v obou zrcadlech (v kadm plku obrazu). Celkem tedy lovk uvid v zrcadlech Z_3 a Z_4 tŠi sv obrazy. (Ke vzniku tŠetho obrazu poznamenejme, e oko pŠijm nikoli jedinÀ paprsek, ale paprsky z malho prostorovho hlu.)
Soutěžní korespondenční seminář z fyziky 1996/1997
První série úloh

Vzorové řešení úlohy č.2 (4 body)

a)

Úkolem je najít velikost a směr minimální rychlosti, jakou musí běžet Karel, aby zachytil míč vykopnutý Josefem.

Situaci znázorňuje Obr. 1. Označme t dobu, která uplyne od vykopnutí míče do chvíle, než jej Karel dostihne. Pro dobu letu míče a pohybu Karla platí

$$t_M = \frac{a+x}{u} \quad , \qquad t_{KAREL} = \frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v} \quad , \tag{8}$$

pak

$$t_M = t_{KAREL} = t \quad , \qquad \frac{a+x}{u} = \frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v} \quad . \tag{9}$$

Úpravou (2) dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2\,(v^2-u^2) + 2\,a\,v^2\,x + a^2\,v^2 - b^2\,u^2 = 0 \quad , \tag{10}$$

v bude minimální právě tehdy, má-li tato kvadratická rovnice pro neznámou x dvojnásobný kořen, tj. je-li diskriminant rovnice (3) roven nule

$$D = 4\,(a^2\,v^4 - (v^2-u^2)\,(a^2\,v^2 - b^2u^2)) \quad , \quad D = 0 \quad . \tag{11}$$

Odtud rychlost Karlova pohybu

$$v = \frac{u\,b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{12}$$

(Splnění nerovnosti $D < 0$ by znamenalo, že rovnice (3) nemá řešení v reálném oboru a v takovém případě by Karel míč vůbec nedoběhl. Hodnota v určená vztahem (5) je tak nejmenší, pro kterou $D \geq 0$),
odpovídající vzdálenost x je

$$x = \frac{-\,2\,a\,v^2}{2\,(v^2-u^2)} = \frac{a\,b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} \quad . \tag{13}$$

Směr Karlova pohybu je dán úhlem α, když

$$\tan\alpha = \frac{x}{b} = \frac{b}{a} \quad . \tag{14}$$

b)

Předpokládáme, že Karel může běžet maximální rychlostí v_0. Je třeba určit maximální rychlost u_0, jakou může Josef míči udělit, aby Karel míč neminul.

Úkol lze řešit stejným postupem, jako pro případ a). Z rovnice (4) určíme u_0 pro dané v_0 . Dostaneme tak maximální rychlost míče

$$u_0 = \frac{v_0\sqrt{a^2+b^2}}{b} \tag{15}$$

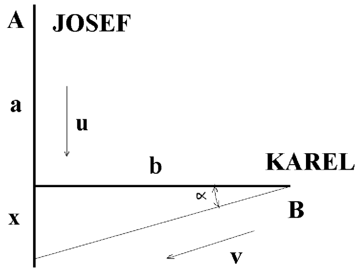
a vzdálenost x

$$x = \frac{-\,2\,a\,{v_0}^2}{2\,({v_0}^2 - {u_0}^2)} = \frac{b^2}{a} \quad . \tag{16}$$

Směr Karlova pohybu je dán úhlem β , pro který platí

$$\tan\beta = \frac{x}{b} = \frac{b}{a} \quad , \qquad\qquad \alpha = \beta \quad . \tag{17}$$

Karel doběhne míč ve stejném místě, jako v případě a).



Obrázek 1: Karel dobíhá míč vykopnutý Josefem.

SoutŘÔní korespondenťní seminá z fyziky 1996/1997
První série úloh

Vzorové e ení úlohy ť.1 (4 body)

ZaveÔme pro pro popis e ení úlohy následující znaťení:

T_{z}, resp. T_{p} ... celkov ťas, kter na dobŘhnutí k lesu pot ebuje zajíc, resp. pes
$\tau = 2$ s ... ťasová ztráta psa v bodŘ A, resp. B

$\delta = 1$ m ... délka náskoku zajíce p ed psem v bodech A a B
$d = 861$ m , $\Delta d = 20$ m , $x = |\mathrm{AB}|$ ... viz obrázek 1 v zadání

OdpovŘÔ a) :

Zajíc dobŘhe k lesu rovnomŘrnou rychlostí v_1 za dobu $T_z = (d - \Delta d + x)/v_1$. Pes bŘÔí rovnomŘrnou rychlostí v_2 3 úseky o celkové délce $d + x - 2\delta$ (viz graf) a navíc se v bodŘ A i B zdrÔí o ťas τ. Na dobŘhnutí k lesu tedy pot ebuje dobu $T_p = (d + x - 2\delta)/v_2 + 2\tau$.

Vzdálenost x urťíme z rozdílu ťasĎ, za které ji urazí zajíc a pes: zajíci trvá ubŘhnutí vzdálenosti x o dobu τ déle, neÔ psovi ubŘhnutí vzdálenosti $x - \delta$, tj:

$$\frac{x}{v_1} = \tau + \frac{x - \delta}{v_2} . \qquad \text{pravou dostáváme:} \quad x = \frac{\tau\, v_2 - \delta}{v_2 - v_1}\, v_1 = 841 \text{ m.}$$

Dosazením do v chozích vztahĎ pro T_z, T_p pak: $T_z = 116$ s a $T_p = 117,\bar{3}$ s.
Zajíc bude v lese p ibliÔnŘ o 1.3 s d íve a tudíÔ se zachrání.

Graf dráhy psa tvo í 3 úseťky urťené dvojicemi bodĎ: $[0\text{ s}; 0\text{ m}]; [t_A; s_A - \delta]$, $[t_A + \tau; s_A]; [t_B; s_B - \delta]$ a $[t_B + \tau; s_B]; [T_p; s_L]$, kde s_A, resp. s_B, resp. s_L, je dráha uraÔená psem do bodu A, resp. do bodu B, resp. k hranici lesa, a t_A, resp. t_B, je ťas, za kter dorazí zajíc do bodu A, resp. B (pes je v tom okamÔiku o 1 m pozadu).

Grafem dráhy zajíce je úseťka s okrajov mi body $[0\text{ s}; 20\text{ m}]$ a $[T_z; s_L]$, která zárove prochází i body $[t_A; s_A]$ a $[t_B; s_B]$.

Podle zadání je v bodŘ obratu A:

$$t_A = \frac{s_A - \delta}{v_2} = \frac{s_A - \Delta d}{v_1} .$$

Odtud úpravou dostaneme:

$$s_A = \frac{\Delta d\, v_2 - \delta\, v_1}{v_2 - v_1} \quad \text{a dosazením: } s_A = 571 \text{ m}, \ t_A = 38 \text{ s.}$$

Dále podle obrázku v zadání: $s_B = s_A + x = 1412$ m , $s_L = d + x = 1702$ m a vzhledem k rovnomŘrné rychlosti zajíce: $t_B = (s_B - \Delta d)/v_1 = 96$ s. Tím jsou v echny body grafu urťeny.

OdpovŘÔ b) :

Oznaťme x vzdálenost místa vbŘhnutí zajíce do lesa od p ímky procházející poťáteťní polohou zajíce a psa (coÔ odpovídá vzdálenosti $|\mathrm{AB}|$ na obr.1 v zadání). Pes musí opŘt urazit dráhu $d + x$, zajíc dráhu $\sqrt{(d - \Delta d)^2 + x^2}$ (p epona pravoúhlého trojúhelníka); oba tentokrát bŘÔí rovnomŘrnou rychlostí. Zajíc se tedy v tomto p ípadŘ mĎÔe zachránit, existují-li takové hodnoty x, Ôe je splnŘna nerovnost:

$$T_z < T_p , \quad \text{neboli} \quad \frac{\sqrt{(d - \Delta d)^2 + x^2}}{v_1} < \frac{d + x}{v_2} .$$

ProtoÔe $v_1, v_2 > 0$ a obŘ strany nerovnice jsou kladné, mĎÔeme ji upravit vynásobením $v_1 v_2$ a umocnŘním. Tím dostáváme pro x kvadratickou nerovnici:

$$(v_2^2 - v_1^2)\, x^2 - 2\, v_1^2\, d\, x + v_2^2 (d - \Delta d)^2 - v_1^2\, d^2 < 0$$

1/4len u x^2 je kladn , takÔe e ením této nerovnice je otev en interval $(x_1; x_2)$, kde x_1, x_2 jsou reálné ko eny odpovídající kvadratické rovnice (pokud existují). Dosazením do vzorce pro ko eny kvadratické rovnice a úpravou dostaneme:

$$x_{1,2} = \frac{v_1^2\, d \mp v_2 \sqrt{v_1^2\, d^2 - (v_2^2 - v_1^2)(d - \Delta d)^2}}{v_2^2 - v_1^2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} x_1 \doteq 9,05\,\mathrm{m} \\ x_2 \doteq 24,5\,\mathrm{km} \end{array}$$

Pro zajíce je ov em rozhodující smŘr, kter m má vybŘhnout, aby dorazil do lesa vťas. Oznaťíme-li α úhel mezi smŘrem pohybu zajíce a kolmicí k hranici lesa, je:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{d - \Delta d} \quad \text{a po dosazení dostáváme:} \quad \alpha_1 \doteq 0,617\,^\circ \doteq 37\,', \ \ \alpha_2 \doteq 88,0\,^\circ\,.$$

Zajíc tedy mĎÔe vybŘhnout smŘrem k lesu pod libovoln m úhlem z intervalu $(\,37\,'; \,88\,^\circ\,)$. Optimální je pro nŘj ov em zvolit úhel co nejmen í, aby mu nedo el dech je tŘ p ed dosaÔením hranice lesa.

OdpovŘÔ c) :

uance zajíce na záchranu závisí pouze na vzdálenosti bodu A (resp. B) od hranice lesa (která je urťena poťáteťním náskokem Δd a rychlostmi v_1, v_2) a ťasové ztrátŘ psa v bodŘ B – nezávisí tedy vĎbec na ťasové ztrátŘ psa v bodŘ A. 1/4asová ztráta psa τ_B musí b t tak malá, aby i s ní dostihl zajíce je tŘ p ed dosaÔením hranice lesa. To vyjad uje nerovnice:

$$\frac{|\mathrm{BL}|}{v_2} + \tau_\mathrm{B} < \frac{|\mathrm{BL}|}{v_1}\,, \quad \text{kde } |\mathrm{BL}| = d - s_\mathrm{A} \text{ je vzdálenost bodu B od lesa.}$$

pravou a dosazením dostáváme podmínku:

$$\tau_\mathrm{B} < (d - s_\mathrm{A})\Big(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\Big) = \frac{2}{3}\ \mathrm{s}.$$

Pes tedy zajíce dostihne, bude-li jeho ťasová ztráta v bodŘ B men í neÔ cca $0,67$ s.

Vzhledem ke zpĎsobu poloÔení druhé ťásti otázky c) je odpovŘÔ na ni kladná, neboĽ pro urťení τ_B pot ebujeme znát kromŘ souťtu $\mathcal{S}_\tau \equiv \tau_\mathrm{A} + \tau_\mathrm{B}$ je tŘ hodnotu nŘjaké dal í, nezávisle zkonstruované kombinace veliťin $\tau_\mathrm{A}, \tau_\mathrm{B}$ – nap . jejich pomŘr $\mathcal{P}_\tau \equiv \tau_\mathrm{A}/\tau_\mathrm{B}$. Podmínku pro to, aby pes zajíce dostihl, pak mĎÔeme vyjád it ve tvaru:

$$\frac{\mathcal{S}_\tau}{1 + \mathcal{P}_\tau} < \frac{2}{3}\ \mathrm{s}.$$

Graf závislosti dráhy psa a zajíce na čase