FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1996/1997

Vzorová řešení 2. série úloh

(25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č.1 (7 bodů)

Pohyb tělesa v odporujícím prostředí

a)
Úkolem je určit maximální velikost rychlosti v_m, které může dosáhnout kulička při pádu ve vodě.

Na kuličku působí tři síly
– gravitační $\vec{F}_{grav} = m\,\vec{g} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho\,\vec{g}$, kde hmotnost hliníkové kuličky $m = \rho\,V$, hustota hliníku $\rho = 2,7\,.10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a objem kuličky poloměru $r = 0,5\,\mathrm{mm}$ je $V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$, gravitační zrychlení $g = 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
– hydrostatická vztlaková síla $\vec{F}_{vztlak} = -V\,\rho_v\,\vec{g} = -\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho_v\,\vec{g}$, kde hustota vody $\rho_v = 1,0\,.10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
– Stokesova síla odporu prostředí $\vec{F}_{odpor} = -6\,\pi\,r\,\vec{v}\,\eta$, kde dynamická viskozita vody $\eta = 1,0\,.10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ a $\vec{v}$ je rychlost kuličky.

Výslednice těchto sil:

$$\vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{vztlak} + \vec{F}_{odpor} \quad . \qquad (1)$$

Kulička se pohybuje maximální rychlostí, je-li její zrychlení nulové.
Platí (II. Newtonův zákon) $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Zrychlení $\vec{a} = \vec{0}$ právě tehdy, když $\vec{F} = \vec{0}$.
Dostáváme tak rovnici

$$\vec{F}_{grav} + \vec{F}_{vztlak} + \vec{F}_{odpor} = \vec{0} \quad ,$$

což ve skalární formě dává

$$\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho\,g - \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho_v\,g - 6\,\pi\,r\,v\,\eta = 0 \quad ,$$

odkud mezní rychlost pohybu kuličky

$$v_m = \frac{2\,r^2\,(\rho - \rho_v)\,g}{9\,\eta} \quad , \tag{2}$$

po číselném dosazení $v_m = \frac{2.\,(0{,}5.10^{-3})^2.\,(1{,}7-1).10^3.\,9{,}81}{9.\,1{,}0.10^{-3}}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 0,93\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b)

Má se ukázat, že změna veličiny $u = v_m - v$ za jednotku času ($\frac{\Delta u}{\Delta t}$) je přímo úměrná okamžité hodnotě u a určit konstantu této úměrnosti.

Mezní rychlost v_m je vzhledem k času konstanta, proto platí

$$\Delta u = -\Delta v \quad , \quad \frac{\Delta u}{\Delta t} = -\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad , \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \quad , \quad \frac{\Delta u}{\Delta t} = -a \quad .$$

Z rovnice (1) ve tvaru $m\,\vec{a} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{vztlak} + \vec{F}_{odpor}$ dostaneme

$$\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho\,a = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho\,g - \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho_v\,g - 6\,\pi\,r\,v\,\eta \quad ,$$

odkud zrychlení

$$a = \frac{\rho - \rho_v}{\rho}\,g - \frac{9\,\eta\,v}{2\,r^2\,\rho} \quad .$$

Po dosazení $v = v_m - u$ a za v_m podle vztahu (2) je zrychlení

$$a = \frac{\rho - \rho_v}{\rho}\,g - \frac{9\,\eta\,v_m}{2\,r^2\,\rho} + \frac{9\,\eta\,u}{2\,r^2\,\rho} = \frac{9\,\eta\,u}{2\,r^2\,\rho} \quad , \tag{3}$$

tedy

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = -\frac{9\,\eta}{2\,r^2\,\rho}\,u \quad .$$

Časová změna veličiny u je přímo úměrná okamžité hodnotě veličiny u samotné s konstantou úměrnosti

$$K = -\frac{9\,\eta}{2\,r^2\,\rho} \quad .$$

Po číselném dosazení je $K = -\frac{9.\,1{,}0.10^{-3}}{2.\,(0{,}5.10^{-3})^2.\,2{,}7.10^3}\,\mathrm{s^{-1}} = -6,7\,\mathrm{s^{-1}}$.

Vzorové řešení úlohy č.2 (8 bodů)

Pohyb tělesa s proměnnou hmotností

Poznámky k řešení:

- Všechny rychlosti, a tedy i hybnosti, jsou vztaženy k souřadnicové soustavě pevně spojené s tratí.
- Rychlost kaménků v této vztažné soustavě je $\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}_r$.

(a)

V okamžiku t tvoří soustavu popsanou v zadání (a) pouze vůz o hmotnosti M jedoucí rychlostí $\vec{v}$, jehož hybnost je:

$$\vec{p}_t = M\vec{v}$$

O Δt později je soustava tvořena vozem o hmotnosti $M - \Delta m$ jedoucím rychlostí $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ a vyhozeným štěrkem s hmotností Δm letícím rychlostí $\vec{u}$. Hybnost této soustavy je:

$$\vec{p}_{t+\Delta t} = (M - \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m\vec{u}$$

Tuto soustavu lze považovat za izolovanou, neboť na ni působí pouze 2 svislé síly (gravitace a reakce trati), jejichž výslednice je nulová. (To však pouze v případě, když je štěrk vyhazován ve směru rovnoběžném s tratí!) Platí pro ni tedy zákon zachování hybnosti:

$$\vec{p}_{t+\Delta t} = \vec{p}_t$$

Změna hmotnosti vozu ΔM je způsobena vyhozením štěrku o hmotnosti Δm, tj:

$$\Delta M = -\Delta m$$

(b)

Podle obrázku v zadání jsou všechny rychlosti rovnoběžné s osou x a rychlost $\vec{v}_r$ je orientována proti směru pohybu vozu. Vektory rychlostí mají ve zvolené souřadnicové soustavě složky:

$$\vec{v} = (v; 0; 0)\,, \quad \Delta\vec{v} = (\Delta v; 0; 0) \quad \text{a} \quad \vec{u} = (v - v_r; 0; 0)\,,$$

kde v, Δv a v_r, jsou velikosti okamžité rychlosti vozu, změny rychlosti vozu za čas Δt a rychlosti štěrku vzhledem k vozu. Každou vektorovou rovnici z (a) lze tedy zapsat pomocí jediné skalární rovnice pro x-ovou souřadnici hybnosti:

$$p_t = Mv\,, \quad p_{t+\Delta t} = (M - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_r) \quad \text{a} \quad p_{t+\Delta t} = p_t$$

Dosadíme do poslední rovnice a roznásobíme:

$$Mv = Mv - \Delta mv + M\Delta v - \Delta m\Delta v + \Delta mv - \Delta mv_r$$

Zanedbáním členu $\Delta m\Delta v$ a dosazením $-\Delta M$ za Δm dostáváme:

$$0 = \Delta Mv + M\Delta v - \Delta Mv + \Delta Mv_r \quad \Rightarrow \quad \Delta Mv_r = -M\Delta v \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta M}{\Delta v} = -\frac{M}{v_r}$$

Výsledná závislost $\frac{\Delta M}{\Delta v}$ na M je tedy přímou úměrností s konstantou úměrnosti: $-\dfrac{1}{v_r}$.

Vzorové řešení úlohy č.3 (5 bodů)

Absorpce záření v látce

Záření dopadající kolmo na vodorovnou desku tloušťky d je za předpokladu stejnorodosti pohlcujícího prostředí rovnoměrně absorbováno hmotou podél celé své dráhy. Úbytek intenzity ve vrstvě tloušťky Δx v libovolné kolmé vzdálenosti x od horního povrchu desky je matematicky vyjádřen vztahem

$$-\frac{\Delta I}{I(x)} = \alpha\Delta x\,,$$

kde α je *lineární koeficient absorpce* charakterizující materiálové vlastnosti prostředí.

(a) Úpravou výše uvedeného vztahu dostáváme požadovaný tvar rovnice pro změnu intenzity ve vrstvě o jednotkové tloušťce

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = -\alpha\, I(x)\ .$$

Tento vztah říká, že změna intenzity je přímo úměrná hodnotě intenzity v hloubce x. Z hlediska struktury a způsobu výkladu je tento výraz obdobou výsledných vztahů z úloh č. 1 a 2.

(b) Z definice polotloušťky l vyplývá, že

$$-\frac{\Delta I}{I(x)} = -\frac{I(x+l)-I(x)}{I(x)} = \alpha\, l = \frac{1}{2}\ .$$

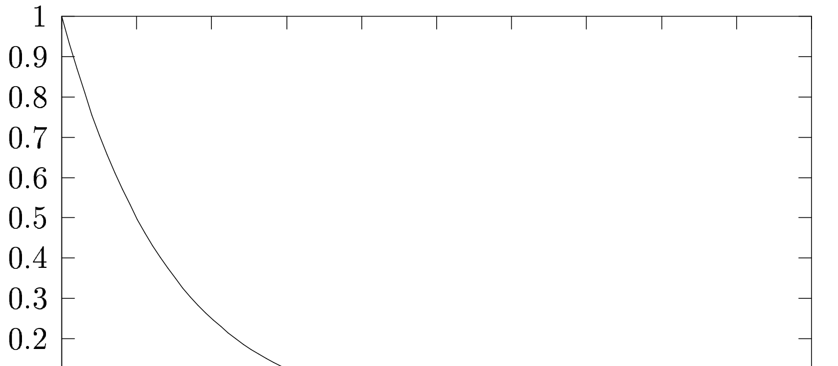
Po průchodu vrstvou tloušťky l v libovolné hloubce poklesne intenzita na tomto úseku na polovinu své hodnoty. Uvážíme-li, že intenzita záření dopadajícího na povrch desky je I_0, dostáváme sérii výsledků:

$$\begin{aligned}
I(x=0) &= I_0\ ,\\
I(x=l) &= \tfrac{I_0}{2}\ ,\\
I(x=2l) &= \tfrac{I_0}{4}\ ,\\
&.\\
&.\\
I(x=nl) &= \tfrac{I_0}{2^n} = I_0\cdot 2^{-n}\ ,
\end{aligned}$$

kde n je přirozené číslo. Výsledky zobecníme tak, že n budeme považovat za libovolné kladné reálné číslo. Pak pro libovolná x dostaneme $n = x/l$, odkud získáme požadovanou závislost intenzity na hloubce

$$I = I(x) = I_0\cdot 2^{-x/l}\ .$$

Obrázek znázorňuje grafický průběh této tzv. exponenciální závislosti pro zadané hodnoty $I_0 = 1$, $l = 0,001$.



Vzorové řešení úlohy č.4 (5 bodů)

Radioaktivní rozpad

a)

Změna počtu nepřeměněných jader za jednotku času v závislosti na okamžitém počtu nepřeměněných jader N se pomocí rozpadové konstanty λ vyjádří takto

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$$

Tato změna je záporná. Ve všech předchozích příkladech se veličiny řídí zákonitostí tohoto typu, tj. relativní změna veličiny závisle proměnné vztažená na jednotkovou změnu nezávisle proměnné je konstantní, v tomto případě $\frac{1}{N}\frac{\Delta N}{\Delta t}$ je rovna konstantě úměrnosti $-\lambda$.

b)

Pokud v čase $t = 0$ máme N_0 radioaktivních jader, potom se jich za dobu τ polovina, tedy $N_0/2$, rozpadne. Po uplynutí doby τ tedy zbývá $N(\tau) = N_0/2$ nepřeměněných jader, po uplynutí doby 2τ pak $N(2\tau) = N(\tau)/2 = N_0/4$, $N(3\tau) = N(2\tau)/2 = N_0/8$, ... $N(n\tau) = N_0/2n$.

Tabulka závislosti počtu nepřeměněných jader N na čase t

t	0τ	1τ	2τ	3τ	4τ	...	$n\tau$
N	N_0	$N_0/2$	$N_0/4$	$N_0/8$	$N_0/16$	...	$N_0/2^n$
t/τ	0	1	2	3	4	...	n
N/N_0	1	1/2	1/4	1/8	1/16	...	$1/2^n$

Graf závislosti počtu jader N/N_0 na proměnné $n = t/\tau$

Tabulka nám ukazuje závislost počtu radioaktivních jader N na násobku poločasu rozpadu τ v tomto tvaru $N(n\tau) = N_0/2^n$. Substitucí $t = n\tau$ a zobecněním platnosti vztahu dostaneme hodnotu N v libovolném čase t, $N(t) = N_0/2^{t/\tau}$.