FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

SOUTĚŽNÍ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY 1996/1997

Vzorová řešení 4. série úloh

(25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č.1 (5 bodů)

Neštěstí ve výtahu

Označme M, m hmotnost výtahu a člověka, V_1 rychlost výtahu těsně před dopadem (ve chvíli, kdy se člověk rozhodne vyskočit), V_2 rychlost výtahu v okamžiku dopadu, v rychlost člověka po odrazu do výskoku.

Pak lze formulovat zákon zachování hybnosti v podobě

$$(M+m)\,V_1 = m\,v + M\,V_2 \tag{1}$$

a zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}\,(M+m)\,{V_1}^2 + E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,M\,{V_2}^2 \qquad , \tag{2}$$

kde $E = m\,g\,h_0$ je energie, kterou člověk dodá do systému při odrazu do výskoku ($h_0 = 0,5\,\mathrm{m}$ je výška výskoku).

Z těchto rovnic po úpravách dostaneme

$$v = V_1 - \sqrt{\frac{2\,E\,M}{m\,(M+m)}} \qquad . \tag{3}$$

Ze vztahu mezi maximální kinetickou a potenciální energií

$$\frac{1}{2}mv^2 = m\,g\,h_B$$

dále vyplývá

$$V_1 = \sqrt{2\,g\,h} \quad , \quad v = \sqrt{2\,g\,h_B} \quad , \tag{4}$$

kde $h_B = 3\,\mathrm{m}$ je udávaná bezpečná výška, ze které člověk ještě bezpečně dopadne a h je hledaná maximální bezpečná výška pro člověka v kabině výtahu..

Rovnici (3) lze pak lze upravit do tvaru

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_B} + \sqrt{h_0}\sqrt{\frac{M}{M+m}} \quad . \tag{5}$$

Je–li kabina výtahu velmi těžká, tj. $M \gg m$, pak je $\frac{M}{M+m} \approx 1$.

Pro maximální bezpečnou výšku pádu kabiny tak dostáváme vztah

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_B} + \sqrt{h_0} \quad ,$$

$$\text{tj.} \qquad h = h_B + h_0 + 2\sqrt{h_B\, h_0} = 5,95\,\mathrm{m} \quad .$$

Vzorové řešení úlohy č.2 (8 bodů)

Kde je bezpečno?

Zvolme kartézský souřadnicový systém s počátkem v místě, kde se nachází Tomáš, tak, že osa x je vodorovná (a leží v rovině trajektorie střely), osa y svislá. Vzhledem k tomu, že každé místo, které lze zasáhnout střelou o rychlosti $u < v$, lze zřejmě zasáhnout i střelou o rychlosti v, omezme se na nalezení množiny bodů, které lze zasáhnout střelou o rychlosti v.

Označme ϑ elevační úhel. Uvědomíme-li si, že na vztahy udávající polohu střely v závislosti na čase (uvažujeme idealizovaný šikmý vrh)

$$x = x(t) = vt\cos\vartheta, \qquad y = y(t) = vt\sin\vartheta - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

se můžeme též dívat jako na soustavu rovnic pro ϑ a t, která má (reálné) řešení právě tehdy, je-li bod o souřadnicích $[x, y]$ zasažitelný střelou o rychlosti v, vidíme, že stačí rozhodnout o řešitelnosti těchto rovnic. Vyjádříme-li si z první rovnice $vt\cos\vartheta$ a z druhé $vt\sin\vartheta$, tyto vztahy umocníme na druhou a sečteme, dostáváme po úpravě

$$\frac{1}{4}g^2\tau^2 + (gy - v^2)\tau + x^2 + y^2 = 0, \tag{2}$$

kde jsme označili $t^2 = \tau$. Řešitelnost kvadratické rovnice (**??**) je určena jejím diskriminantem

$$D = v^4 - x^2g^2 - 2gyv^2. \tag{3}$$

Ochranná obálka je křivka, která odděluje ohroženou ($D > 0$) a bezpečnou ($D < 0$) část prostoru, její rovnici tedy získáme, položíme-li v (**??**) $D = 0$. Po převedení do tvaru $y = f(x)$ dostáváme

$$y_0 = f(x) = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}\,x^2, \tag{4}$$

což je hledaná rovnice ochranné obálky. Vidíme, že pro $y > y_0$ je $D < 0$ a (**??**) nemá reálné řešení. Naopak pro $y > y_0$ je $D > 0$ a (**??**) má reálné řešení. Protože však $\tau = t^2$, je podmínkou pro to, aby i soustava (??) měla reálné řešení, aby alespoň jeden z kořenů (??) byl kladný. Uvažujme proto větší z kořenů (??), tedy

$$\tau = \frac{v^2 - gy + \sqrt{v^4 - x^2g^2 - 2gyv^2}}{\frac{1}{2}g^2}. \tag{5}$$

Zřejmě $\tau > 0$, jestliže

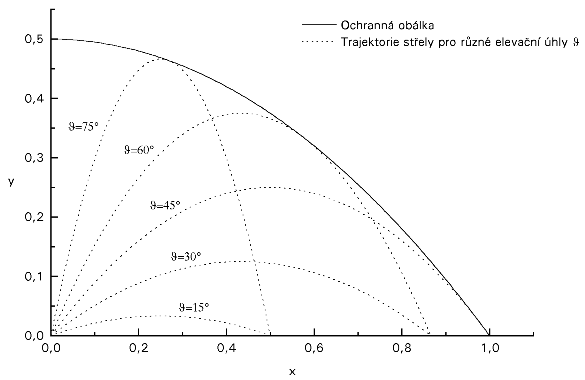
$$y < \frac{v^2}{g} + \sqrt{\frac{v^4}{g^2} - x^2 - 2\frac{v^2y}{g}}. \tag{6}$$

Tato nerovnost je jistě splněna, neboť dle předpokladu

$$y < y_0 = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}x^2. \tag{7}$$

Vidíme tedy, že pro $y < y_0$ mají rovnice (??) reálné řešení, všechny body prostoru tomu odpovídající jsou zasažitelné, a křivka daná vztahem (??) je proto opravdu hledanou ochrannou obálkou.

Povšimněme si, že z rovnice obálky lze triviálně získat maximální výšku výstupu $v^2/2g$ položením $x = 0$ a maximální dostřel v^2/g položením $y_0 = 0$.



Obrázek 1: Ochranná obálka

Ochranná obálka (resp. její polovina) je nakreslena na obrázku **??** společně s několika trajektoriemi střel pro vybrané elevační úhly. Měřítka na osách jsou relativní vůči hodnotě maximálního dostřelu v^2/g, která odpovídá jedničce.

Poznámka k vyjádření rovnice obálky jako plochy v prostoru
Označme vodorovné osy kartézského souřadného systému x_1, x_2 a svislou osu y. Uvědomíme-li si, že ve vztahu (**??**) vyjadřuje x^2 čtverec vodorovné vzdálenosti od počátku, vidíme, že rovnici ochranné obálky jako plochy v prostoru můžeme psát

$$y_0 = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}\,(x_1^2 + x_2^2). \tag{8}$$

Vzorové řešení úlohy č.3 (6 bodů)

Kameny a bubliny

Uvažujme nejprve jedno těleso o hustotě ϱ_1 nacházející se v popsaném „vodním prostoru". Toto těleso kolem sebe vytváří gravitační pole, jehož intenzita je přímo úměrná ϱ_1 (neboť intenzita gravitačního pole je úměrná hmotnosti jeho zdroje, a ta je úměrná hustotě zdroje). Toto pole se skládá s gravitačním polem vytvářeným okolní vodou; podle zadání gravitační pole vymizí (tj. součet intenzit gravitačního pole tělesa a okolní vody bude nulový), právě když $\varrho_1 = \varrho_v$ (ϱ_v je hustota okolní vody). Pro $\varrho_1 \neq \varrho_v$ vzniká v okolí tělesa gravitační pole, jehož intenzita je přímo úměrná rozdílu $\varrho_1 - \varrho_v$. Při $\varrho_1 > \varrho_v$ (kámen) směřuje intenzita výsledného pole k tělesu, při $\varrho_1 < \varrho_v$ (bublina) naopak od něj.

Vzniklé gravitační pole ovšem působí i na okolní vodu, čímž v ní vytváří dodatečný hydrostatický tlak, jehož velikost roste ve směru výsledné gravitační intenzity (podobně jako roste tlak vody v moři směrem k centru přitažlivosti – Zemi).

Zkoumejme teď působení výsledného gravitačního a tlakového pole od prvního tělesa na jiné těleso s hustotou ϱ_2. Druhé tělěso je k prvnímu přitahováno gravitační silou o velikosti $F_g \sim \varrho_2\,(\varrho_1 - \varrho_v)$ (znak „$\sim$" značí přímou úměrnost) a odpuzováno vztlakovou silou, jejíž velikost je (podle Archimedova zákona) rovna tíze vody druhým tělesem vytlačené, tj. $F_v \sim \varrho_v\,(\varrho_1 - \varrho_v)$. Konstanta úměrnosti je zřejmě v obou případech stejná, takže výsledná síla, kterou první těleso přitahuje druhé, je:

$$F \;=\; F_g - F_v \;\sim\; (\varrho_2 - \varrho_v)\,(\varrho_1 - \varrho_v)\,. \tag{1}$$

Tento vztah je vzhledem k záměně těles (tj. záměně indexů $1 \leftrightarrow 2$) symetrický, takže druhé těleso působí na první silou stejně velkou, pouze opačně orientovanou (neboť v předchozích úvahách byla orientace sil volena ve směru k prvnímu tělesu).

Orientaci vzájemného silového působení kamenů a bublin určíme dosazením odpovídajících hustot do vztahu (1) :

a) dva kameny ... $\varrho_1 \doteq \varrho_2 > \varrho_v \;\Rightarrow\; F > 0$ ... se přitahují,
b) kámen a bublina ... $\varrho_1 > \varrho_v > \varrho_2 \;\Rightarrow\; F < 0$ ... se odpuzují,
c) dvě bubliny ... $\varrho_1 \doteq \varrho_2 < \varrho_v \;\Rightarrow\; F > 0$ ... se přitahují.

Vzorové řešení úlohy č.4 (6 bodů)

Gravitační pole nebo neinerciální soustava?

Budeme sledovat pohyb pozorovatele spojeného s určitou neinerciální vztažnou soustavou, která se pohybuje s tzv. *unášivým zrychlením* $\vec{a_u}$ vůči inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí. Na pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě působí setrvačná síla $\vec{F^*} = -m\vec{a_u}$.

Jak známo, Newtonovy zákony pozbývají v neinerciální vztažné soustavě na platnosti. Abychom obnovili rovnost v matematickém vyjádření 2. Newtonova zákona v nenerciální vztažné soustavě, musíme k pravé straně rovnice (vektorový součet skutečných sil působících na dané těleso) přičíst i sílu setrvačnou. Tak dostáváme

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F_i} + \vec{F^*}\ .$$

Levá strana vyjadřuje výsledné silové působení na pozorované těleso.

V našem případě lze za předpokladu neměnné hmotnosti pozorovatele 2. Newtonův zákon zapsat ve tvaru $\vec{g'} = \vec{g} - \vec{a_u}$, kde $\vec{g}$ je gravitační zrychlení a $\vec{g'}$ zrychlení, jenž je pro pozorovatele spojeného s neinerciální vztažnou soustavou ekvivalentní s gravitačním. Výše uvedená vektorová rovnice pro zrychlení popisuje všechny čtyři uvažované situace. Naším úkolem je pro jednotlivé případy vyjádřit velikost a určit směr zrychlení $\vec{g'}$.

(a) Pohyb ve zdviži vzhůru (zrychlení mají stejný směr a opačnou orientaci)

$$g' = g + a_u$$

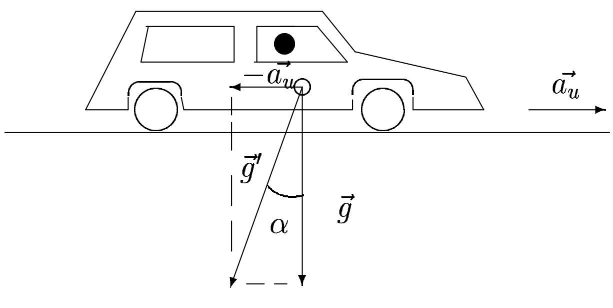
Pohyb ve zdviži dolů (zrychlení mají stejný směr i orientaci)

$$g' = g - a_u$$

Výsledné zrychlení $\vec{g'}$ má orientaci vždy shodnou s $\vec{g}$, neboť v druhém případě vždy platí $g \geq a_u$, jinak nastává volný pád pozorovatele.

(b) Situace je schematicky znázorněna na obr.1. Vektory zrychlení spolu svírají pravý úhel, takže platí

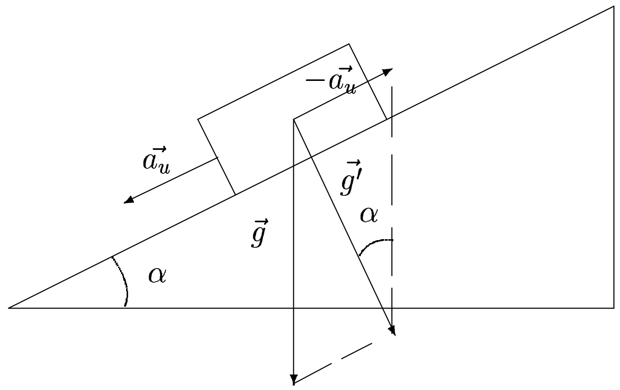
$$g' = \sqrt{|\vec{g}|^2 + |-\vec{a_u}|^2}$$



Obrázek 1:

Vektor $\vec{g'} = g' \cdot \vec{i}$, kde $\vec{i} = (-\sin\alpha, -\cos\alpha)$ je směrový vektor a $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|-\vec{a_u}|}{|\vec{g}|}$.

(c) V tomto případě je jediným zdrojem zrychlení gravitační pole. Bedna s pozorovatelem je po nakloněné rovině unášena se zrychlením odpovídajícím průmětu $\vec{g}$ do nakloněné roviny, takže $a_u = g \cdot \sin\alpha$ (viz obr. 2). Zrychlení $\vec{g'}$ je kolmé vůči nakloněné rovině a má velikost $g' = \sqrt{g^2 - g^2 \cdot \sin^2\alpha} = g \cdot \cos\alpha$ (průmět gravitačního zrychlení do roviny kolmé k nakloněné).

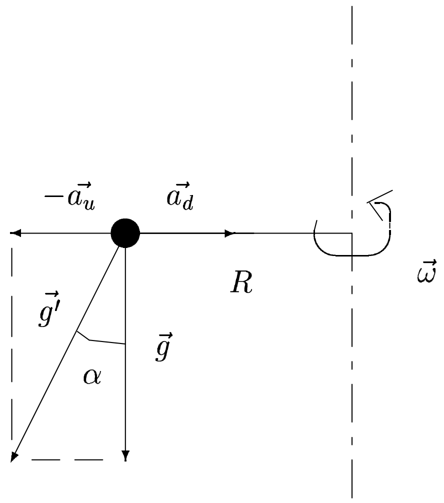


Obrázek 2:

(d) Při rotačním pohybu je $\vec{a_u} = \vec{a_d}$, kde $|\vec{a_d}| = \omega^2 R$ ($\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti otáčení pozorovatele a R poloměr kolotoče) označujeme jako dostředivé zrychlení. Pro velikost vektoru $\vec{g'}$ (viz obr. 3) dostáváme pomocí Pythagorovy věty

$$g' = \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2} \ .$$

Vektor $\vec{g'} = g' \cdot \vec{i}$, kde $\vec{i} = (-\sin\alpha, -\cos\alpha)$ a $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{|-\vec{a_u}|}{|\vec{g}|}$.



Obrázek 3:

Vzorové řešení úlohy č.5 (prémiová)

Kosmické katastrofy

Označme R_0 počáteční vzdálenost planety o hmotnosti m od centra o hmotnosti M, v_0 její počáteční rychlost a T_0 její dobu oběhu po kruhové dráze.

a) Trajektorie planety se změní, neboť se dvakrát zvětší dostředivá gravitační síla centra. Novou trajektorií bude podle 1. Keplerova zákona elipsa (kružnice to být nemůže, protože planeta začne z výchozího bodu padat k centru s větším zrychlením než odpovídá pohybu po kružnici; z téhož důvodu nepřipadá v úvahu ani pohyb po otevřené dráze). Ve výchozím bodě je $\vec{v_0}\perp\vec{R_0}$, což je splněno pouze ve dvou bodech elipsy - afeliu a periheliu. Planeta se k centru o zvýšené hmotnosti začne přibližovat, takže výchozí bod bude afeliem její nové trajektorie. K výpočtu vzdálenosti planety od centra v periheliu využijeme 2. Keplerův zákon, který říká, že plocha opsaná průvodičem planety za jednotku času je stejná ve všech bodech trajektorie, tedy i v periheliu a v afeliu:

$$w = \frac{1}{2}R_0 v_0 = \frac{1}{2}Rv \ , \tag{1}$$

kde R, resp. v, je hledaná vzdálenost, resp. rychlost, planety v periheliu. Dále platí zákon zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \kappa\frac{m2M}{R_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{m2M}{R} \ . \tag{2}$$

Abychom se zbavili parametru M, využijeme faktu, že gravitační síla, kterou centrum před zdvojnásobením své hmotnosti působilo na planetu, udávala planetě dostředivé zrychlení právě tak velké, aby se pohybovala po kruhové dráze:

$$\kappa\frac{mM}{R_0^2} = m\frac{v_0^2}{R_0} \quad \Rightarrow \quad \kappa M = v_0^2 R_0 \ . \tag{3}$$

Ze vztahů (1) až (3) dostaneme po úpravách kvadratickou rovnici

$$3R^2 - 4R_0R + R_0^2 = 0 \ ,$$

která má kořeny $R_\mathrm{A} = R_0$ (výchozí bod) a $R_\mathrm{P} = \frac{1}{3}R_0$ (hledaná vzdálenost v periheliu). Hlavní poloosa nové eliptické dráhy je

$$a = \frac{1}{2}(R_\mathrm{A} + R_\mathrm{P}) = \frac{2}{3}R_0 \ .$$

Využitím vlastností elipsy dostaneme ostatní parametry dráhy:

excentricitu: $e = a - R_\mathrm{P} = \dfrac{1}{3}R_0$

a vedlejší poloosu: $b = \sqrt{a^2 - e^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R_0$.

Oběžnou dobu planety T určíme ze znalosti její plošné rychlosti a plochy ohraničené trajektorií planety. Zřejmě $S = wT$, kde $S = \pi ab$ je plocha elipsy a w je plošná rychlost planety. Dosazením za a, b a w dostáváme

$$T = \frac{4}{9}\pi\sqrt{3}\frac{R_0}{v_0} \ .$$

Ze vztahu pro oběžnou dobu planety po původní kruhové trajektorii $T_0 = 2\pi R_0/v_0$ vyjádříme R_0/v_0 a dosazením do předchozího vztahu dostáváme novou oběžnou dobu

$$T = \frac{2\sqrt{3}}{9} T_0 \ .$$

b) Poklesne-li rychlost planety na kv_0, kde $k < 1$, začne se planeta opět odchylovat od své původní kruhové dráhy směrem k centru. Její nová trajektorie začíná v afeliu ze stejných důvodů, jako v úloze a). Jako v úloze a) spočítáme parametry nové trajektorie: Z 2. Keplerova zákona $R_0 k v_0 = Rv$, ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2} m k^2 v_0^2 - \kappa \frac{mM}{R_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \kappa \frac{mM}{R}$$

a ze vztahu (3) dostaneme pro vzdálenost perihelia od centra rovnici

$$(2 - k^2) R^2 - 2 R_0 R + k^2 R_0^2 = 0 \ ,$$

jejíž kořeny jsou $R_\mathrm{A} = R_0$ a $R_\mathrm{P} = \dfrac{k^2}{2 - k^2} R_0$. Hlavní poloosa nové eliptické dráhy je

$$a_k = \frac{R_0}{2} \left(1 + \frac{k^2}{2 - k^2}\right) = \frac{R_0}{2 - k^2} \ . \tag{4}$$

Novou oběžnou dobu T_k můžeme vypočítat stejně jako v případě a), ale jednodušší je zde využít 3. Keplerova zákona, který dává do souvislosti oběžné doby a hlavní poloosy různých trajektorií planet obíhajících kolem téhož centra:

$$\left(\frac{T_k}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{a_k}{R_0}\right)^3 \ .$$

Dosazením za a_k z (4) dostáváme

$$T_k = (2 - k^2)^{-\frac{3}{2}} T_0 \ . \tag{5}$$

Blíží-li se k k 0, blíží se perihelium trajektorie planety ke gravitačnímu centru; do perihelia přitom z výchozího bodu dospěje planeta za čas $T_k/2$. Pro $k = 0$ je $R_\mathrm{P} = 0$ a doba pádu planety na centrum je

$$T_\mathrm{dopad} = \frac{T_0}{2} 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} T_0 \ .$$