

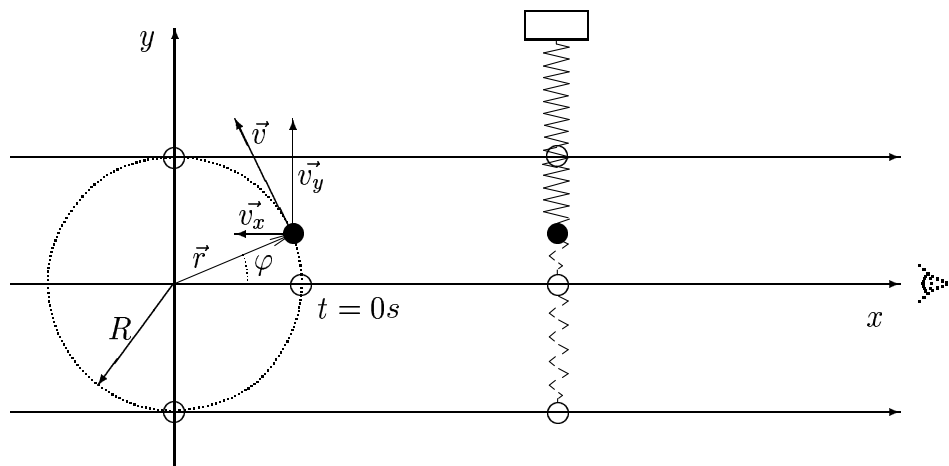
FYZIKÁLNÍ SEKCEPřírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY**4. ročník — 1997/1998****Vzorová řešení 1. série úloh**
(25 bodů)**Vzorové řešení úlohy č.1 (3 body)****Pohyby Země a měření času**

Země vykonává dva základní periodické pohyby. Obíhá kolem Slunce po eliptické trajektorii, v jejímž ohnisku je Slunce, s periodou jeden rok a rotuje kolem své vlastní osy s periodou jeden den. Zemská osa nezachovává při rotaci stále stejný směr, ale vykonává tzv. precesní pohyb v důsledku jejího sklonu k rovině ekliptiky a zploštění Země. Tento pohyb je velmi pomalý, má periodu asi 25700 let a zemská osa při něm opisuje plášť kužele. Působením Měsíce dochází navíc k tzv. nutaci, jež se projevuje zvlněním precesního kužele s periodou 18,6 let.

Při určování času se vychází z prvních dvou základních pohybů Země. Pravý sluneční čas se odvozuje od pravého slunečního dne, který představuje dobu mezi dvěma následujícími dolními kulminacemi pravého (skutečného) Slunce místním poledníkem. Než se Země otočí kolem své osy o 360° , změní svou polohu vůči Slunci a musí se tedy otočit ještě o malý úhel navíc, aby stejný poledník opět protínal spojnicí středů Slunce a Země. Velikost tohoto úhlu závisí na rychlosti pohybu Země kolem Slunce. Protože okamžitá rychlost Země se řídí její vzdáleností od Slunce, mění se v průběhu roku i délka pravého slunečního dne. Tuto nerovnoměrnost odstraňuje zavedení středního slunečního času. Eliptická trajektorie Země se nahrazuje kružnicí o poloměru rovnajícimu se střední vzdálenosti Země-Slunce. Díky tomu je doba trvání středního slunečního dne konstantní, tzv. pravý střední sluneční den. Hvězdný čas je určen pomocí hodinového úhlu jarního bodu. Stejně tak hvězdný den je doba mezi následujícími horními kulminacemi jarního bodu. Z praktických důvodů byl zaveden čas pásmový a čas smluvní. Země je rozdělena po 15° na 24 časových pásem, v nichž platí stejný pásmový čas. Ten odpovídá místnímu střednímu slunečnímu času poledníku procházejícího středem pásma. Směrem na východ je v každém pásmu vždy o hodinu víc. Smluvní čas označuje čas, kterým se skutečně řídíme a který se může lišit od příslušného pásmového času. Často se stanoví jeden smluvní čas pro celé území, kde by rozdělení na pásma působilo zbytečné komplikace. Smluvním časem rozumíme i přechod ze zimního na letní čas.

Pokud by se Země pohybovala kolem Slunce rovnoměrně po kružnici, pravý sluneční čas by se téměř shodoval se středním slunečním časem. Drobné kolísání délky pravého



b) Za předpokladu, že vzdálenost pozorovatele od středu kružnice je mnohonásobně větší než R , oko pozorovatele, umístěné na ose x , není schopno zaznamenat přibližování a vzdalování kuličky během jejího pohybu. Pozorovatel tedy sleduje průmět polohového vektoru kuličky $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ na osu y , tj. y -ovou souřadnici kuličky.

Z obrázku je vidět, že pro y -ovou souřadnici platí:

$$y = R \sin(\omega t) \quad \text{æ}$$

Srovnáním tohoto vztahu se vztahem pro výchylku harmonického oscilátoru

$$y = y_m \sin(\omega t)$$

(y_m je maximální výchylka oscilátoru) dojdeme k závěru, že obě rovnice jsou analogické (jestliže za y_m dosadíme hodnotu R , dostáváme zcela identické rovnice) a pohyb popisovaný těmito rovnicemi je harmonický kmitavý pohyb.

c) K řešení následující části úlohy můžeme přistupovat dvěma různými způsoby.

1. Řešení geometrické:

Z obrázku je patrné, že vektor postupné rychlosti $\vec{v}$ a jeho průmět do osy y $\vec{v}_y$ svírají úhel φ . Pro y -ovou souřadnici rychlosti v_y pak platí:

$$v_y = v \cos \varphi; \quad v = \omega R, \quad \varphi = \omega t.$$

2. Řešení pomocí derivace:

Vztah pro y -ovou souřadnici rychlosti v_y určíme jako derivaci y -ové souřadnice polohového vektoru $\vec{r}(x, y)$:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(R \sin(\omega t))}{dt} = R \frac{d(\sin(\omega t))}{dt}.$$

$$v_y = \omega R \cos(\omega t).$$

d)

1. Geometrické řešení:

Vektor dostředivého zrychlení $\vec{a}_d = (a_{dx}, a_{dy})$ v každém okamžiku směřuje do středu kružnice, tj. do počátku soustavy souřadnic. Má tedy opačný směr než polohový vektor kuličky $\vec{r}(x, y)$. Vektor $\vec{a}_d = (a_{dx}, a_{dy})$ a jeho průmět do osy y svírají úhel $(90^\circ - \varphi)$.

Pro y -ovou souřadnici zrychlení platí $a_{dy} = -a_d \sin \varphi$.

Když do posledního vztahu dosadíme $a_d = \omega^2 R$ a $\varphi = \omega t$, dostaneme

$$a_{dy} = -\omega^2 R \sin(\omega t).$$

2. Řešení pomocí derivace:

y -ovou souřadnici dostředivého zrychlení určíme jako derivaci y -ové souřadnice rychlosti

$$a_{dy} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(\omega R \cos(\omega t))}{dt} = \omega R \frac{d(\cos(\omega t))}{dt}$$

$$a_{dy} = \omega R (-\sin(\omega t)) \frac{d(\omega t)}{dt}$$

$$a_{dy} = -\omega^2 R \sin(\omega t).$$

Součin $R \sin(\omega t)$ vyjadřuje y -ovou souřadnici kuličky. Můžeme tedy psát $a_{dy} = -\omega^2 y$. Jestliže pomocí konstanty úměrnosti K vyjádříme a_{dy} , dostáváme $a_{dy} = -Ky$. Ze dvou posledních rovnic pak vyplývá $K = \omega^2$.

Úhlovou rychlost ω vyjádříme pomocí periody T (viz část **a**) této úlohy) a dosadíme do poslední rovnice. Po úpravě máme periodu T pomocí konstanty K

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{K}}.$$

Vzorové řešení úlohy č.3 (6 bodů)

Kmitající tyč na vodní hladině

Na tyč působí v tomto případě dvě síly. První z nich je gravitační síla, která je rovnoběžná a souhlasně orientovaná s osou x a má velikost

$$F_g = mg = S(l_0 \rho_0 + l \rho_d)g,$$

kde S je obsah průřezu tyče. Druhou silou je hydrostatická vztlačková síla, působící proti směru gravitačního zrychlení, o velikosti

$$F_{vz} = S l \rho_v g.$$

V rovnovážném stavu musí být obě síly vykompenzovány.

$$F_g = F_{vz}$$

Z této rovnice můžeme určit, zda těleso plave, a jak velká část tělesa vyčnívá nad hladinu.

$$S(l_0 \rho_0 + l \rho_d) = S l \rho_v g$$

$$L = \frac{l_0 \rho_0 + l \rho_d}{\rho_v}$$

Po dosazení dostaneme

$$L = 1.865m$$

$$h = l + l_0 - L = 0.185m.$$

Nad hladinu tedy vyčnívá 0.185m tyče. Další možností, jak zjistit, jestli těleso plave, je porovnat jeho průměrnou hustotu s hustotou vody. Průměrná hustota tyče je

$$\rho = \frac{m}{V},$$

kde m je celková hmotnost a V celkový objem tyče, tj.

$$\rho = \frac{l_0\rho_0 + l\rho_d}{l + l_0} \doteq 0.91kgm^{-3}.$$

Hustota tyče je menší než hustota vody, takže tyč bude plavat. Vtlačíme-li tyč do vody o malou délku $x_0 < l + l_0 - L$, bude výsledná síla rovna součtu síly tíhové $\vec{F}_g$ a vztlakové síly $\vec{F}'_{vz}$ o velikosti $F'_{vz} = S\rho_v g(L + x_0)$. Výsledná síla bude směřovat do rovnovážné polohy a bude mít velikost

$$F = Sg\rho x_0.$$

Pustíme-li tyč, bude se pohybovat vzhůru až do rovnovážné polohy, kde je výsledná síla nulová, ale setrvačností se dostane až do výšky x_0 nad rovnovážnou polohu, odkud se zase bude pohybovat zpět, protože gravitační síla bude v tom okamžiku větší než hydrostatická. Při obecné výchylce x z rovnovážné polohy je výsledná síla

$$\vec{F}_{vsl} = S(l_0\rho_0 + l\rho_d)g\vec{x}^0 + S\rho_v g(L + x)(-\vec{x}^0) = S\rho_v g x \vec{x}^0,$$

kde $\vec{x}^0$ je jednotkový vektor ve směru osy x . $\vec{F}_{vsl}$ má tedy neustále opačný směr než výchylka a platí

$$\vec{F}_{vsl} = -k\vec{x},$$

kde $k = S\rho_v g$. Jedná se tedy o kmitavý harmonický pohyb.

$$a = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Poněvadž je $m = S(l_0\rho_0 + l\rho_d)$,

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_v g}{(l_0\rho_0 + l\rho_d)}}.$$

A protože platí $l_0\rho_0 + l\rho_d = \rho_v L$,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Periodu pohybu vypočítáme potom ze vztahu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2.71s.$$

Kmitavý pohyb kolem rovnovážné polohy je popsán rovnicí $x = A\sin(\omega t + \phi)$. Zavedme si osu x_1 , která je rovnoběžná a souhlasně orientovaná se zadanou osou x a má počátek

v rovnovážné poloze horního konce tyče. Amplituda je rovna hodnotě x_0 . V souřadnicové soustavě spojené s rovnovážnou polohou je souřadnice horního konce tyče na počátku pohybu $x_1(t=0s) = x_0$. Dosadíme do vztahu pro výchylku

$$x_1(t=0s) = x_0 \sin(0 + \phi) = x_0 \sin \phi$$

$$x_0 \sin \phi = x_0,$$

a tedy $\phi = \frac{\pi}{2}$. Pohyb kolem rovnovážné polohy je tedy popsán rovnicí

$$x_1 = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Abychom dostali řešení v zadané soustavě souřadnic, spojené s vodní hladinou, musíme ode všech hodnot x_1 odečíst vzdálenost mezi rovnovážnou polohou horního konce tyče a vodní hladinou $h = l + l_0 - L$. Pohyb horního konce tyče se řídí vztahem

$$x = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - (l + l_0 - L).$$

Pro rychlost platí

$$v_x = x_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Maximální hodnota velikosti rychlosti je v místech, pro které nabývá funkce $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ hodnot ± 1 . Z toho vyplývá, že

$$t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \dots$$

Maximální hodnota velikosti rychlosti odpovídá průchodu rovnovážnou polohou a dosahuje hodnoty

$$v_{max} = \omega x_0.$$

Zrychlení tyče splňuje rovnici

$$a_x = -x_0 \omega^2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Z podobné úvahy jako u výpočtu rychlosti dospějeme k podmínce $\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \pm 1$ a odtud k řešení

$$t = \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, \dots$$

To znamená, že maximální velikost zrychlení odpovídá krajním polohám a dosahuje hodnoty

$$a_{max} = \omega^2 x_0.$$

æ

Vzorové řešení úlohy č.4 (8 bodů)

Kmity pístu v nádobě s plynem

Při pohybu pístu v nádobě dochází k izotermické kompresi a expanzi plynu. Platí tedy stavová rovnice pro izotermický děj v ideálním plynu:

$$pV = konst. \quad (1)$$

Z rovnice (1) můžeme vyjádřit tlak plynu p_1 , p_2 v obou částech nádoby:

$$p_1 = \frac{pV}{V_1} \quad p_2 = \frac{pV}{V_2}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = pV \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

Označme x výchylku pístu z rovnovážné polohy. Pak

$$\Delta p = pV \left(\frac{1}{V - xS} - \frac{1}{V + xS} \right) = \frac{2pVSx}{V^2 - x^2S^2}. \quad (2)$$

Při malé počáteční rychlosti pístu $\vec{v}_0$ budou i výchylky x malé a v rovnici (2) bude splněno $x^2S^2 \ll V^2$. Proto můžeme zanedbat člen x^2 a dostáváme:

$$\Delta p \doteq \frac{2pSx}{V}. \quad (3)$$

Plyn v nádobě působí na píst silou

$$\vec{F} = -\Delta p S \vec{n}, \quad (4)$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor ve směru osy x (kolmý k pístu). Po dosazení ze vztahu (3) dostáváme:

$$\vec{F} = -\frac{2pS^2}{V} x \cdot \vec{n}. \quad (5)$$

Na pohybující se píst tedy působí vratná síla, jejíž velikost je přímo úměrná okamžité výchylce pístu z rovnovážné polohy. Proto kmity pístu budou harmonické. (Kdyby nebylo možné provést aproximaci malých výchylek, museli bychom do rovnice (4) dosadit ze vztahu (2) a kmity bychom nemohli považovat za harmonické.)

Podle druhého Newtonova zákona $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, tj.

$$a_x = -\frac{2pS^2}{Vm}x = -\omega^2x \quad \omega = \sqrt{\frac{2pS^2}{Vm}} \quad (6)$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{S} \sqrt{\frac{2Vm}{p}}. \quad (7)$$

Závislost okamžité výchylky harmonického oscilátoru na čase má tvar:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Počáteční fázi φ určíme ze skutečnosti, že v čase $t = 0$ byla okamžitá výchylka $x(0) = 0$: $\varphi = 0$. Při průchodu rovnovážnou polohou má píst maximální rychlost $v_{max} = v_0$. Platí tedy $A = \frac{v_0}{\omega}$ a

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t \quad (9)$$

Velikost zrychlení je maximální při maximální výchylce (jak je vidět z rovnice (6)):

$$a_{max} = \omega^2 A = Sv_0 \sqrt{\frac{2p}{Vm}}. \quad (10)$$

æ

Vzorové řešení úlohy č.5 — prémiová

Kámen v tunelu

Ukažme nejprve, že výsledné silové působení tenké homogenní kulové sféry o tloušťce Δr a hustotě ρ na kámen (považovaný za hmotný bod) nacházející se uvnitř této sféry je nulové. Důkaz je založen na výpočtu silového působení částí sféry, ležících uvnitř velmi úzkých kuželů¹ s vrcholem v místě, kde se nachází kámen. Zaveďme následující označení veličin vztahujících se k i -tému kuželi (viz. obrázek 1)

$\vec{x}_i$ nechť označuje polohový vektor hmotného středu části sféry ležící uvnitř kužele vůči kameni,

$\vec{x}_{i0}$ jednotkový vektor téhož směru, tedy $\vec{x}_i/x_i$, kde $x_i = |\vec{x}_i|$,

S_i plochu části kulové sféry ležící uvnitř kužele,

$\vec{n}_i$ vektor vnější normály k ploše S_i ,

Q_i plochu průřezu S_i do roviny kolmé k $\vec{x}_i$,

M_i hmotnost části sféry ležící uvnitř kužele,

$\vec{E}_i$ intenzitu gravitačního pole části sféry ležící uvnitř kužele v místě kamene

a α_i úhel mezi vektory $\vec{x}_i$ a $\vec{n}_i$.

Uvažujme dvojkůžele dle obrázku v zadání úlohy, jeho části označme 1 a 2. Kužely jsou velmi úzké, plochy S_i můžeme tedy považovat přibližně za rovinné a odpovídající části sféry z hlediska jejich gravitačního působení na kámen za hmotné body. Intenzita gravitačního pole $\vec{E}_i$ je pak podle Newtonova gravitačního zákona

$$\vec{E}_i = \frac{\kappa M_i}{x_i^2} \vec{x}_{i0}, \quad (1)$$

kde κ označuje gravitační konstantu. Hmotnost M_i lze vyjádřit pomocí S_i

$$M_i = \rho \Delta r S_i. \quad (2)$$

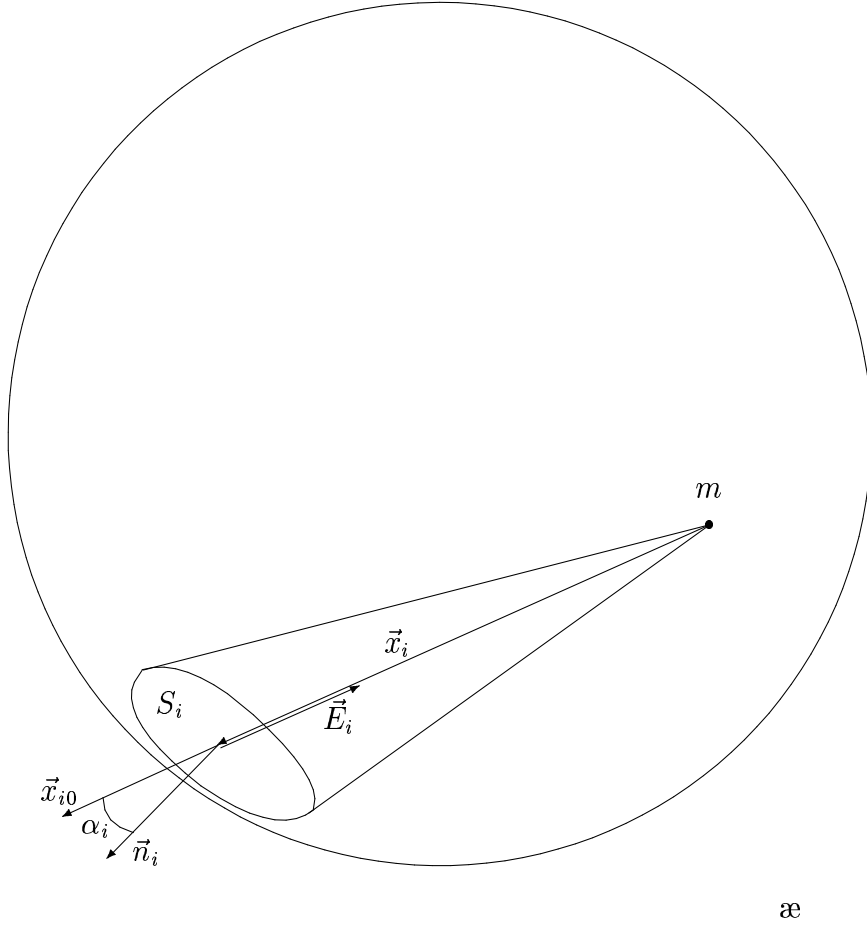
Plocha Q_i je průřezem S_i do roviny kolmé k $\vec{x}_i$, a proto

$$Q_i = S_i \cos \alpha_i. \quad (3)$$

Dosazením z (??) a (??) do (??) dostáváme

$$\vec{E}_i = \frac{\kappa \rho Q_i \Delta r}{x_i^2 \cos \alpha_i} \vec{x}_{i0}. \quad (4)$$

¹Pojmem kužel budeme označovat výhradně kužel ve smyslu jeho obecné definice, pokud by se jednalo o kužel kolmý, či dokonce rotační, bude to vždy explicitně uvedeno.



Obrázek 1:

Nyní uvažme, že kolmé kužely s podstavami Q_1 , Q_2 jsou stejnohlé, a platí tedy

$$\frac{Q_1}{x_1^2} = \frac{Q_2}{x_2^2} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \Omega. \quad (5)$$

Dosazením do (??) pak dostáváme

$$\vec{E}_i = \frac{\kappa \rho \Omega \Delta r}{\cos \alpha_i} \vec{x}_{i0}. \quad (6)$$

Nyní zbývá porovnat úhly α_1 , α_2 . Rozvážíme-li geometrii problému, vidíme, že všechny uvažované vektory leží v rovině dané středem kulové sféry $\mathcal{S}$ a středy podstav Q_1 , Q_2 , které označme $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ v tomto pořadí. Situaci v této rovině znázorňuje obrázek 2. Ze symetrie vůči ose procházející středem sféry a středem úsečky $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ je zřejmé, že

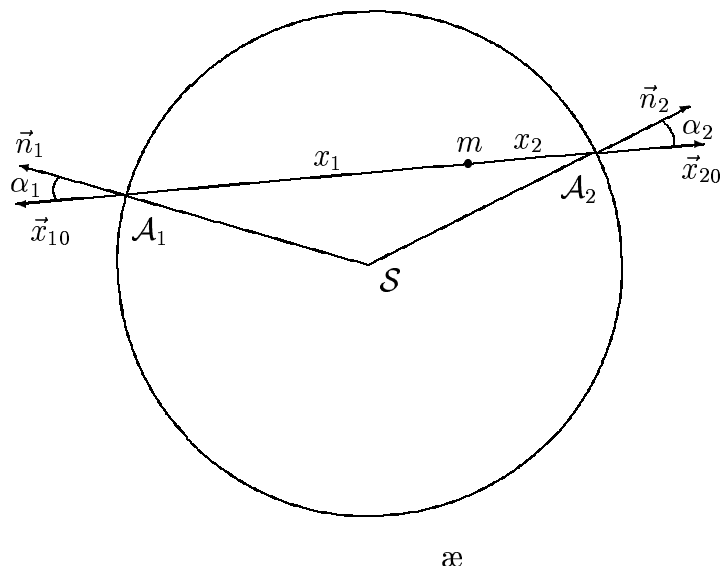
$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \stackrel{\text{ozn.}}{=} \cos \alpha. \quad (7)$$

Dosazením do (??) dostáváme

$$\vec{E}_1 = \frac{\kappa \rho \Omega \Delta r}{\cos \alpha} \vec{x}_{10} \quad \vec{E}_2 = \frac{\kappa \rho \Omega \Delta r}{\cos \alpha} \vec{x}_{20}. \quad (8)$$

Nyní uvažme, že $\vec{x}_{20} = -\vec{x}_{10}$ (vektory jsou jednotkové a opačně orientované), a tedy

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}; \quad (9)$$



Obrázek 2:

výsledná intenzita gravitačního pole částí sféry ležících uvnitř kuželů 1 a 2 je tedy nulová. Tímto můžeme zřejmě každé části kulové sféry přiřadit vzájemně jednoznačně jinou část, jejíž gravitační pole eliminuje gravitační pole první části. Protože vnější „slupku“ můžeme rozdělit na takovéto tenké kulové sféry, jejichž gravitační pole je v místě kamene nulové, je nulové i výsledné gravitační pole celé „slupky“, které je součtem polí jednotlivých sfér. Tím je tvrzení dokázáno.

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu pohybu kamene, přičemž předpokládejme, že gravitační pole homogenní koule je vně této koule stejné jako gravitační pole hmotného bodu stejné hmotnosti ležícího ve středu koule, důkaz tohoto tvrzení bude podán v poznámce na konci řešení. Označme r vzdálenost kamene od středu Země. Výsledná gravitační síla F působící na kámen je pak dle výše uvedeného

$$F = -\kappa \frac{mM(r)}{r^2}, \quad (10)$$

kde $M(r)$ označuje hmotnost vnitřní koule o poloměru r , tedy $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, což po dosazení do (10) dává

$$F = -\frac{4}{3}\pi \kappa \rho m r \stackrel{\text{ozn.}}{=} -kr. \quad (11)$$

Vidíme, že vratná síla je úměrná výchylce (tj. vzdálenosti od středu Země), a pohyb je tedy harmonický s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa \rho}}, \quad (12)$$

kde ω označuje kruhovou frekvenci. Rovnovážná poloha je zřejmě ve středu Země, neboť zde je výsledná síla rovna nule. Protože kámen jsme pustili do tunelu s nulovou počáteční rychlostí, je amplituda A pohybu rovna poloměru Země R , maximální rychlost je rychlost při průchodu rovnovážnou polohou a její velikost je

$$v_{\max} = A\omega = R\sqrt{\frac{4}{3}\pi \kappa \rho}, \quad (13)$$

maximální velikost zrychlení je

$$a_{\max} = A\omega^2 = \frac{4}{3}\pi\kappa\rho R. \quad (14)$$

Poznámka 1 — Komentář k došlým řešením

Všechna došlá řešení s výjimkou jednoho byla ukázkou toho, jak lze nesprávnou úvahou dospět ke správnému závěru. Kromě této jedné světlé výjimky se totiž nikdo při důkazu tvrzení, že výsledné gravitační působení vnější vrstvy je nulové, neobtěžoval vzít v úvahu, že podstavy kuželů nejsou kolmé k $\vec{x}_i$ (navzdory tomu, že mnoho řešení obsahovalo obrázek, ze kterého je tato skutečnost jasně patrná), a není na první pohled zřejmé, že úhly α_1, α_2 jsou stejné, a není tedy jasné, zda $S_i \sim x_i^2$.

Dalším rozšířeným neopodstatněným krokem bylo vyjadřování výsledků pomocí R a gravitačního zrychlení g na povrchu namísto pomocí R a ρ (často bez odvození nebo alespoň konstatování vztahu mezi těmito veličinami) a následného výpočtu číselných hodnot z předpokladu, že $g = g_n \doteq 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Nikde totiž nebylo uvedeno, že za ρ bereme průměrnou hustotu Země, stejně logické by například bylo uvažovat jako ρ takovou hustotu ρ_T , pro kterou bude perioda pohybu kamene stejná jako pro skutečné rozložení hmotnosti Země. Navíc při zápisu periody pohybu pomocí R a g dostaneme výraz, ze kterého není vůbec patrné, že perioda pohybu nezávisí na poloměru R , ale pouze na hustotě.

Poznámka 2 — Gravitační pole sféricky symetrického tělesa

Důkaz tvrzení, že gravitační pole sféricky symetrického tělesa je vně tohoto tělesa stejné jako gravitační pole hmotného bodu stejné hmotnosti ležícího v jeho středu, bude proveden ve třech krocích; nejprve ukážeme jistou globální vlastnost intenzity $\vec{E}$ gravitačního pole hmotného bodu, kterou poté snadno zobecníme na gravitační pole libovolného tělesa a nakonec s pomocí této vlastnosti spočteme gravitační pole libovolného sféricky symetrického tělesa.

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m , kolem kterého opíšeme myšlenou kulovou sféru o poloměru r , přičemž její střed nemusí ležet v uvažovaném hmotném bodě. Kolem tohoto hmotného bodu dále opíšeme druhou myšlenou kulovou sféru o poloměru r' (označujme dále všechny veličiny vztahující se k této sféře čárkovaně) se středem v tomto bodě (viz. obrázek 3). Rozdělme první sféru na velký počet N velmi malých částí S_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Počítejme hodnotu skalárního součinu $\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i$ (ponecháváme označení z první části řešení) vynásobeného velikostí plochy S_i , tedy součinu $\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i$. Dosazením za $\vec{E}_i$ z Newtonova gravitačního zákona dostáváme

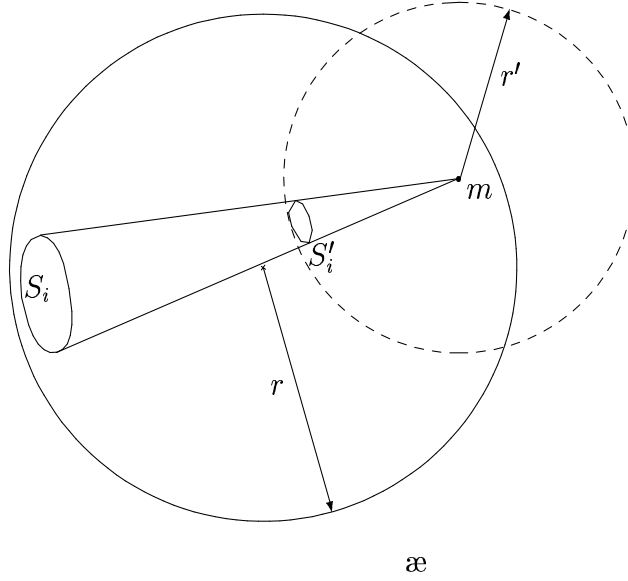
$$\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = -\kappa \frac{m}{x_i^2} \vec{x}_{i0} \cdot \vec{n}_i S_i = -\kappa \frac{m}{x_i^2} S_i |\vec{x}_{i0}| |\vec{n}_i| \cos \alpha_i = -\kappa \frac{m}{x_i^2} S_i \cos \alpha_i, \quad (15)$$

kde jsme využili faktu, že vektory $\vec{x}_{i0}$ a $\vec{n}_i$ jsou jednotkové a úhel mezi nimi je α_i . Dosazením za $S_i \cos \alpha_i$ z (??) pak dostáváme

$$\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = -\kappa \frac{m}{x_i^2} Q_i. \quad (16)$$

Provedeme-li stejný výpočet pro plochu S'_i , která je tvořena průnikem „čárkované“ sféry s kuželem s podstavou S_i a vrcholem v uvažovaném hmotném bodě, dostaneme analogicky

$$\vec{E}'_i \cdot \vec{n}'_i S'_i = -\kappa \frac{m}{x_i'^2} Q'_i. \quad (17)$$



Obrázek 3:

Nyní uvažme, že oba kužele jsou podobné, a tedy

$$\frac{Q_i}{x_i^2} = \frac{Q'_i}{x_i'^2}, \quad (18)$$

srovnáním (??) a (??) pak dostáváme

$$\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = \vec{E}'_i \cdot \vec{n}'_i S'_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = \sum_{i=1}^N \vec{E}'_i \cdot \vec{n}'_i S'_i. \quad (19)$$

Součet přes plochu „čárkované“ sféry lze ovšem vypočíst pomocí vztahu (??), neboť její střed leží v hmotném bodě, a tedy $x'_i = r'$ a $\vec{n}'_i \parallel \vec{x}'_{i0}$, a tedy $\cos \alpha'_i = 1$ a tedy $Q'_i = S'_i$. Dosazením do (??) dostáváme

$$\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = \sum_{i=1}^N -\kappa \frac{m}{r'^2} S'_i. \quad (20)$$

Protože κ , m a r' jsou konstanty, lze je vytknout před sumu a dostáváme

$$\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = -\kappa \frac{m}{r'^2} \sum_{i=1}^N S'_i = -\kappa \frac{m}{r'^2} 4\pi r'^2 = -4\pi \kappa m. \quad (21)$$

To je důležitý výsledek. Povšimněme si, že součet $\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i$ přes celou plochu koule nezávisí ani na jejím poloměru r ani na poloze hmotného bodu uvnitř této koule, pouze na jeho hmotnosti m .

Zobecnění tohoto výsledku na gravitačního pole libovolného tělesa je již snadné — uvažme, že každé těleso můžeme myšleně rozdělit na velký počet malých částí, které už je možno považovat za hmotné body, pro něž platí (??), a že intenzita gravitačního pole je aditivní veličina, stejně jako hmotnost, takže sečteme-li levé strany (??) pro jednotlivé hmotné body, dostaneme levou stranu (??) pro celkovou intenzitu, zatímco na pravé straně dostaneme součet hmotností všech hmotných bodů, tedy celkovou hmotnost tělesa.

Analogickým postupem lze také ukázat, že příspěvky k $\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i$ gravitačního pole hmotného bodu, a v důsledku toho i libovolného tělesa, ležícího *vně* koule se odečtou, a celkový příspěvek k součtu (??) je nulový. To nám umožňuje brát za $\vec{E}_i$ celkovou intenzitu v daném bodě a nikoli jen celkovou intenzitu gravitačního pole těles nacházejících se uvnitř kulové sféry. Výsledek je dokonce možné zobecnit na případ, kdy plocha, přes kterou sčítáme, není kulová sféra, ale uzavřená plocha obecného tvaru. Tato zobecnění ovšem nejsou pro náš případ podstatná, a proto se jimi nebudeme dále zabývat a přistupme konečně k výpočtu intenzity gravitačního pole libovolného sféricky symetrického tělesa pomocí vztahu (??).

Zajímá-li nás tedy intenzita gravitačního pole ve vzdálenosti r od středu sféricky symetrického tělesa o hmotnosti m (r ovšem musí být tak velké, aby celé těleso leželo v kouli o poloměru r), opišme kolem středu tělesa kulovou sféru o poloměru r a počítejme součet (??). Protože těleso je sféricky symetrické, musí být symetrické i rozložení intenzity, a proto bude mít $\vec{E}_i$ na celé sféře stejnou velikost, kterou označme E , a bude antiparalelní s $\vec{n}_i$, tedy $\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = -E S_i$. Dosazením do (??) pak dostáváme

$$-4\pi\kappa m = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \vec{n}_i S_i = -E \sum_{i=1}^N S_i = -E 4\pi r^2, \quad (22)$$

z toho snadno dostáváme velikost intenzity

$$E = \kappa \frac{m}{r^2}. \quad (23)$$

Vidíme, že velikost i směr intenzity gravitačního pole sféricky symetrického tělesa o hmotnosti m je vně tohoto tělesa stejná jako u gravitačního pole hmotného bodu o stejné hmotnosti ležícím ve středu tělesa, což bylo dokázat.