

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

4. ročník — 1997/1998

Vzorová řešení 2. série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č.1 (7 bodů)

Pan Tompkins se setkává s neznámými silami

(a) K situaci popsané v zadání dojde, začne-li se vlak pohybovat s vhodným zrychlením vůči inerciální vztažné soustavě, za niž je považováno nástupiště. Z hlediska pozorovatele stojícího na nástupišti působí na bednu pouze dvě síly: tíhová síla $\vec{F}_g = m\vec{g}$, souhlasně rovnoběžná s vektorem tíhového zrychlení, a tlaková síla podložky $\vec{N}$, s tímto vektorem rovnoběžná nesouhlasně. Těleso spočívá na vodorovné podlaze, takže se ve svislém směru nepohybuje (vazební podmínka). Proto platí $\vec{F}_g + \vec{N} = \vec{0}$. Vůči pozorovateli na nástupišti se tedy bedna pohybuje mezi jednotlivými srážkami se stěnou vagónu vždy stálou rychlostí. Před první srážkou je tato rychlost rovna původní rychlosti vlaku, tj. $\vec{v}$.

(b) V neinerciální vztažné soustavě neplatí druhý Newtonův zákon v obvyklém tvaru. Pozorovatel ve vagónu jej bude moci použít pouze tehdy, pokud kromě reálných sil vezme v úvahu i existenci dodatečné fiktivní síly (jakési opravy na neinerciálnost dané vztažné soustavy) $\vec{F}^* = -m\vec{A}$, kde $\vec{A}$ je unášivé zrychlení (zrychlení neinerciální vztažné soustavy vůči libovolné soustavě inerciální). Druhý Newtonův zákon zapsaný panem Tompkinsem má tedy tvar:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}^* \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{A}.$$

Protože je díky vazební podmínce $m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$, musí být unášivé zrychlení, při němž nastává situace pozorovaná panem Tompkinsem, rovno $\vec{A} = -\vec{a}$. Pro pozorovatele na nástupišti síla $\vec{F}^*$ neexistuje. Druhý Newtonův zákon, zapsaný tímto pozorovatelem, bude tedy (s použitím vazební podmínky a označením zrychlení bedny v inerciální soustavě jako $\vec{a}_i$):

$$m\vec{a}_i = m\vec{g} + \vec{N} \Rightarrow \vec{a}_i = \vec{0} .$$

(c) Síly akce a reakce, vystupující ve třetím Newtonově zákonu, jsou silami **vzájemného působení** objektů. Fiktivní síla $\vec{F}^*$, „zachraňující“ druhý Newtonův zákon i v neinerciální soustavě, tuto povahu nemá. Neexistuje k ní proto reakce.

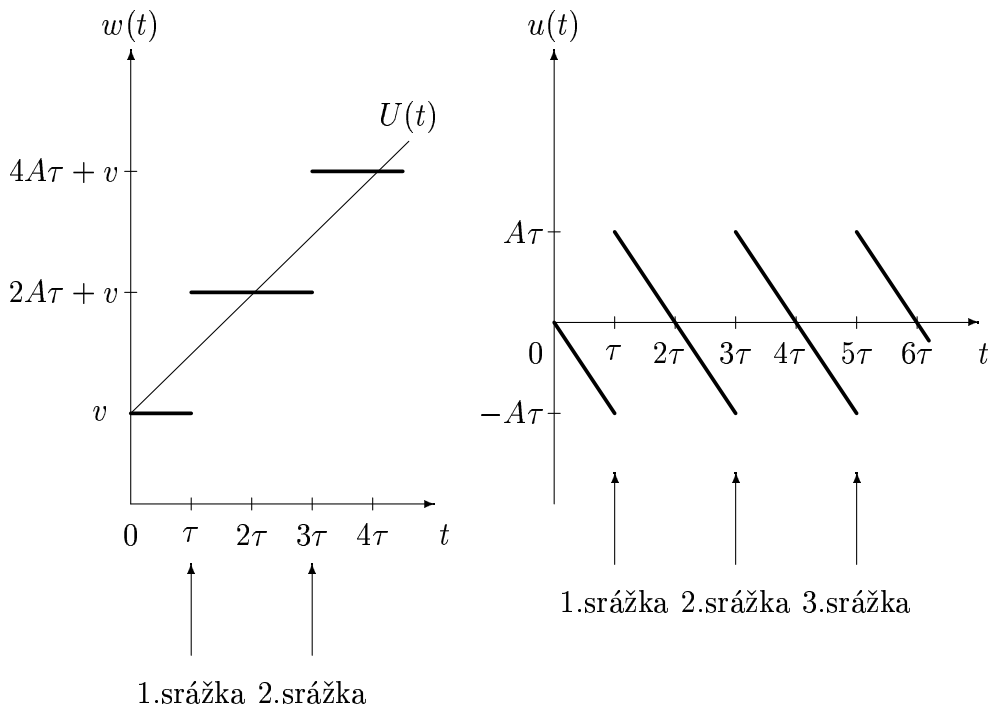
(d) Označme $\vec{U}(t) = \vec{v} + \vec{A} t$ závislost rychlosti vlaku na čase od okamžiku $t = 0$, kdy se začal urychlovat. Budeme úlohu řešit vůči pozorovateli na nástupišti, tj. najdeme závislost rychlosti bedny $\vec{w}(t)$ na čase vzhledem k inerciální soustavě spojené s nástupišťem. Rychlost bedny vzhledem k vlaku, kterou označíme $\vec{u}(t)$, pak bude dána vztahem

$$\vec{u}(t) = \vec{w}(t) - \vec{U}(t) .$$

Označme τ okamžik, kdy dojde ke srážce bedny se stěnou vagónu. V časovém intervalu $[0, \tau]$ se bedna pohybuje vzhledem k nástupišti rychlostí $\vec{w}(t) = \vec{v}$ (ve směru jízdy vlaku), její rychlost vůči stěně vagónu je tedy $\vec{u}(t) = \vec{v} - \vec{U}(t) = -\vec{A} t$, v okamžiku srážky pak $\vec{u}(\tau) = -\vec{A} \tau$. Srážka je pružná, proto relativní rychlost bedny vůči stěně bude po odrazu $-\vec{u}(\tau) = \vec{A} \tau$ a rychlost vůči nástupišti pak $\vec{A} \tau + \vec{U}(\tau) = 2\vec{A} \tau + \vec{v}$, pokud pokládáme dobu srážky za zanedbatelnou. Pro $t > \tau$ do okamžiku další případné srážky je rychlost bedny vzhledem k nástupišti, resp. vzhledem ke stěně vagónu:

$$\vec{w}(t) = 2\vec{A} \tau + \vec{v} = \text{konst} , \text{ resp. } \vec{u}(t) = \vec{w}(t) - \vec{U}(t) = \vec{A} (2\tau - t) .$$

Z posledního vztahu je vidět, že se bedna vzhledem k vagónu zastaví v okamžiku τ' , kdy $\vec{u}(\tau') = 0 \Rightarrow \tau' = 2\tau$, tj. po uplynutí další doby τ od první srážky. Za tuto dobu bedna urazí vzhledem k vlaku stejnou dráhu jako před srážkou. Zastaví se tedy opět uprostřed vagónu a celý děj se opakuje. Situaci vystihují následující grafy závislosti rychlosti bedny vzhledem k nástupišti i vzhledem k vlaku na čase.



Pozn.: Největší potíže většina z Vás měla s částí (d), tj. při popisu chování bedny po srážce se stěnou vagónu. V zadání je uvedeno, že srážka je pružná. Proto při rovnoměrně zrychleném pohybu vlaku nemůže bedna po srážce zůstat u stěny vagónu. Pak by se totiž jednalo o srážku dokonale nepružnou.

Vzorové řešení úlohy č.2 (6 bodů)

Na točně

a) Řešení z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě (mimo točnu): Na člověka stojícího na točně působí dva okolní objekty: Země a podložka. Působení Země je charakterizováno tíhovou silou $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$, působení podložky je dáno výslednicí svislé tlakové síly $\vec{N}$ a vodorovné třecí síly $\vec{T}$. Pokud je člověk vzhledem k točně v klidu, jedná se o tzv. statickou třecí sílu, jejíž velikost nesmí překročit hodnotu $T_{max} = N f_0$, určenou velikostí tlakové síly a koeficientem statického tření. Výsledkem působení sil $\vec{F}_g$, $\vec{N}$ a $\vec{T}$ je rotační pohyb člověka (jakožto tuhého tělesa) stálou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem pevné osy z . Celkové zrychlení těžiště člověka vzhledem k pozorovateli mimo točnu je tedy dáno zrychlením dostředivým, tj

$$\vec{a} = \vec{a}_d, \quad a_d = \omega^2 \left(R - \frac{l}{2} \cos \alpha \right).$$

V předchozím vztahu jsme označili l výšku člověka a předpokládali, že jeho těžiště leží v polovině jeho výšky, to znamená, že považujeme člověka za homogenní těleso. Platí tedy

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \Rightarrow m\omega^2 \left(R - \frac{l}{2} \cos \alpha \right) = T, \quad 0 = -mg + N.$$

Z druhého Newtonova zákona zapsaného pro těžiště tělesa (tzv. první impulsová věta, vyplývající z druhého Newtonova zákona pro hmotný bod a z třetího Newtonova zákona) jsme získali dvě rovnice pro tři neznámé veličiny N, T, α . Abychom mohli úlohu vyřešit, potřebujeme třetí rovnici. Ta se týká rotačního pohybu tělesa a je rovněž důsledkem druhého a třetího Newtonova zákona (tzv. druhá impulsová věta). Obecné řešení úlohy je obtížné a již nyní je zřejmé, že výsledek bude obecně záviset na výšce člověka. Pro získání přibližného řešení použijeme zjednodušení nabízeného v zadání a budeme výšku člověka považovat za velmi malou vzhledem k poloměru točny, tj $l \ll R$. Tento předpoklad odpovídá náhradě tuhého tělesa hmotným bodem umístěným do těžiště a vede k požadavku, aby výsledný moment všech sil vzhledem k těžišti byl nulový. Moment tíhové síly vůči těžišti je nulový automaticky, nebo celkové působení elementárních tíhových sil, působících na jednotlivé částice tělesa, lze nahradit celkovou tíhovou silou umístěnou právě do těžiště. Síly $\vec{N}$ a $\vec{T}$ mají působiště ve stykovém bodě člověka s točnou, tedy na podrážkách bot. Aby byl i jejich výsledný moment vůči těžišti nulový, musí jejich výslednice těžištěm procházet. Proto

$$N = \tan \alpha.$$

Řešením této a předcházející rovnice dostaneme

$$\omega^2 \left(R - \frac{l}{2} \cos \alpha \right) = \frac{g}{\tan \alpha},$$

Na levé straně této rovnice však lze výraz $\frac{l}{2} \cos \alpha$ opět zanedbat proti R a určit úhel α . Musíme však mít na mysli, že naše úvaha platí jen potud, pokud je člověk vůči točně v klidu, tj. pokud velikost statické třecí síly nepřekročí maximální přípustnou hodnotu T_{max} . Pokud by z poslední rovnice vycházela taková hodnota úhlu α , že by tato podmínka splněna nebyla, nemohl by se člověk na obvodu točny udržet v klidu při jakémkoliv náklonu. Celkově tedy dostáváme

$$\tan \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}, \quad T = m\omega^2 R \leq m g f_0 \Rightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{g f_0}{R}}.$$

Je několik možností, jak zamezit tomu, aby při vyšších frekvencích člověk nedobrovolně opustil točnu. Nejjednodušším řešením je opustit točnu dobrovolně. Z fyzikálních řešení bych doporučoval přemístění blíže k ose rotace a tím pádem zmenšení poloměru R . Další možností je zvětšit koeficient statického tření, například výměnou obuvi, nebo zdrsněním povrchu točny. Nejobtížněji realizovatelné je přemístění točny na místo s větším gravitačním zrychlením (Jupiter, Slunce,..).

ad b) Řešení úlohy z hlediska pozorovatele spojeného s točnou.

Z hlediska pozorovatele spojeného s točnou je člověk v klidu, zrychlení jeho těžiště je tedy nulové a člověk nekoná ani rotační pohyb. Pro hmotný bod nacházející se na točně ve vzdálenosti r od osy rotace je unášivé zrychlení rovno $\vec{A}(r) = \omega^2 r \vec{n}$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor směřující od obvodu točny k jejímu středu. Na každý hmotný element Δm tělesa (v našem případě člověka) pak kromě sil skutečných působí ještě fiktivní odstředivá síla $\Delta \vec{F}^* = -m\vec{A} = -\Delta m \omega^2 r \vec{n}$. Celkový účinek elementárních odstředivých sil, které mají svá působišť spojitě rozmístěna v tělese, lze nahradit výslednou odstředivou silou $\vec{F}^*$, která je součtem všech těchto elementárních odstředivých sil a její působišť je zvoleno tak, aby její moment vzhledem k těžišti tělesa byl stejný, jako výsledný moment všech elementárních odstředivých sil $\Delta \vec{F}^*$. Jestliže však, v souladu se zadáním úlohy, považujeme výšku člověka za zanedbatelnou, nejsou úvahy o momentech podstatné. Protože je zrychlení hmotného bodu, představujícího člověka, v dané vztažné soustavě nulové, usuzujeme, že výslednice všech skutečných i fiktivních sil je rovněž nulová, tj

$$\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}^* = \vec{0}$$

tj.

$$mg + N = 0, \quad T - m\omega^2 R = 0.$$

Řešením těchto rovnic po doplnění podmínkou $N = \tan \alpha$ dostaneme stejné výsledky, jako v první části úlohy.

Vzorové řešení úlohy č.3 (7 bodů)

Na točně se dějí divné věci

Pan Tompkins je vůči točně v klidu. To znamená, že výslednice sil, které na něj ve vztažné soustavě spojené s točnou působí, je nulová. Těmito silami jsou: síla tíhová $\vec{F}_g = m\vec{g}$, která má vzhledem k okolním předmětům svislý směr, jak pan Tompkins ví ze zkušenosti, odstředivá síla $\vec{F}^*$, což je fiktivní síla projevující se v rotujících soustavách, a tlaková síla podložky $\vec{N}$, kolmá k podložce (viz Obr.1). Třecí síla $\vec{T}$, jíž působí na pana Tompkinse rovněž podlaha, je v tomto případě nulová, neboť pan Tompkins stojí kolmo k podlaze (podle řešení úlohy č.2 je $T = N \cot \alpha$, v našem případě je však $\alpha = 90^\circ$). Použijme předpoklad z předchozí úlohy a považujeme pana Tompkinse za hmotný bod ve vzdálenosti r od osy rotace. Pro výslednici sil dostaneme:

$$\vec{F}_g + \vec{F}^* + \vec{N} = \vec{0} \quad (1)$$

Pro odstředivou sílu platí:

$$\vec{F}^* = -m\vec{A} = -m\omega^2 r \vec{n} \quad , \quad (2)$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor ve směru unášivého zrychlení ($\vec{n}$ tedy směřuje ke středu točny). Označme φ úhel, který svírá podlaha s vodorovným směrem. (Pan Tompkins může úhel φ poznat podle sklonu okolních předmětů.) Tento úhel bude záviset na vzdálenosti r od středu točny. Z rovnice (1) plyne (rozkladem sil do složek podél os x' , y'):

$$x' : \quad mg \sin \varphi - m\omega^2 r \cos \varphi = 0 \quad (3)$$

$$y' : \quad N - mg \cos \varphi - m\omega^2 r \sin \varphi = 0 \quad (4)$$

Z rovnice (4) vyjádříme $\tan \varphi$ a pomocí obrázku Obr.1 velikost síly $\vec{N}$:

$$\tan \varphi = \frac{\omega^2 r}{g} \quad , \quad (5)$$

$$N = \sqrt{F_g^2 + (F^*)^2} = mg \sqrt{1 + \frac{\omega^4 r^2}{g^2}} \quad . \quad (6)$$

Hodnotu N vypočtenou z rovnice (6) by ukázala pružinová váha, kdyby na ní pan Tompkins stál v místě r . Z rovnice (5) je vidět, že úhel φ roste s rostoucí vzdáleností r . V porovnání s obrázkem v zadání máme:

$$\frac{\Delta z_1}{\Delta r_1} \doteq \frac{\omega^2}{g} r_1 \quad , \quad \frac{\Delta z_2}{\Delta r_2} \doteq \frac{\omega^2}{g} r_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad (7)$$

obecně tedy

$$\frac{\Delta z}{\Delta r} \doteq \frac{\omega^2}{g} r \quad . \quad (8)$$

Výsledek (8) je zcela analogický například vztahu $\frac{\Delta s}{\Delta t} \doteq at$ pro přírůstek dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu za jednotku času. Víme, že platí $s = \frac{1}{2}at^2$. Můžeme proto odhadovat, že tvar podlahy v závislosti na r , tj. funkce $z = z(r)$, bude popsán vzorcem, v němž a nahradíme výrazem $\frac{\omega^2}{g}$:

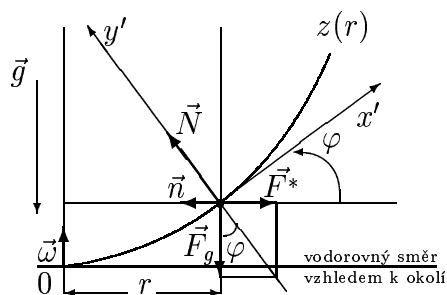
$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad . \quad (9)$$

Poznámka: Při znalosti integrálního počtu bychom ke vztahu (9) dospěli, kdybychom v rovnici (8) provedli limitní přechod pro $\Delta r \rightarrow 0$:

$$z'(r) = \frac{dz}{dr} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta r} = \frac{\omega^2}{g} r \quad .$$

Po integraci dostávame:

$$z(r) = \int z'(r) dr = \frac{\omega^2}{2q} r^2 \quad .$$



Obt.1

Poznámka k řešením účastníků: Úlohu č.3 řešilo 35 respondentů. Asi třetina z nich byla

úspěšná. Nejčastější chyby byly:

- Chyba interpretační: Je nutné si uvědomit, že pan Tompkins je v neinerciální vztažné soustavě v klidu. Proto tlaková síla podložky (vždy kolmá k podložce) musí vykompenzovat součet $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_o$ ($\vec{T} = \vec{0}$ pro $\alpha = 90^\circ$). Proto musí být $\vec{F}$ kolmá k podložce.
- Dosazení R z úlohy č.2: V úloze č.2 má R význam poloměru ploché točny. Není důvod se domnívat, že poloměr obvodu parabolické točny bude také R .

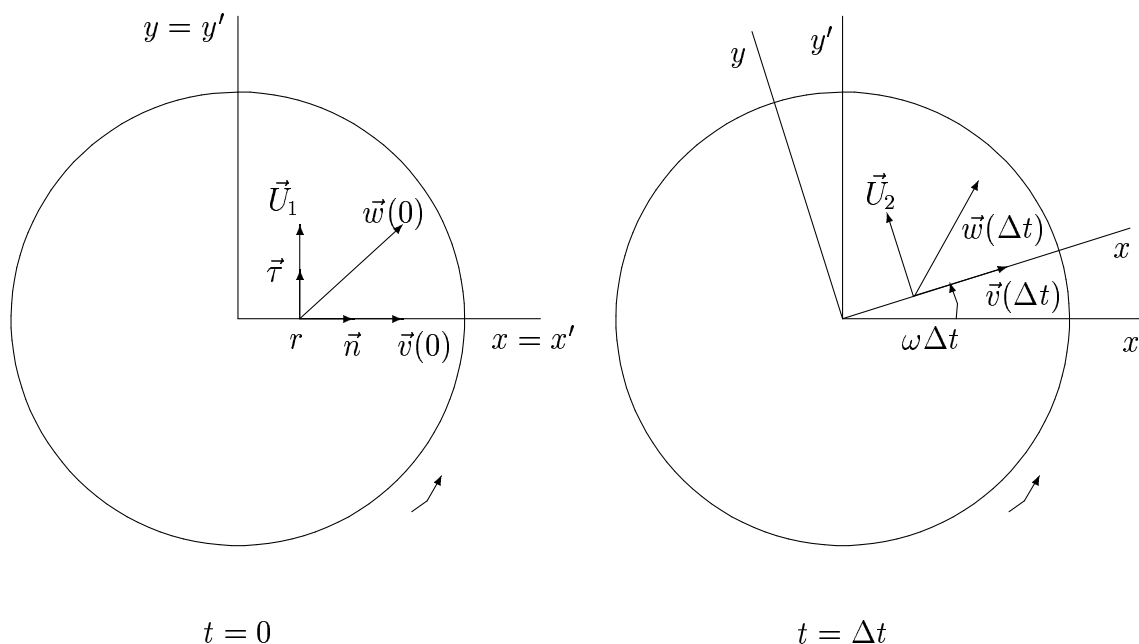
Vzorové řešení úlohy č. 4 — prémiová

Záhady pokračují

Uvažujme nejprve jednodušší situaci, kdy *točna* je vodorovná, jako tomu bylo v úloze 2. Unášivé zrychlení příslušející hmotnému bodu v neinerciální vztažné soustavě, jehož znalost je rozhodující pro vyjádření fiktivních sil, určíme tak, že zjistíme, jak se mění rychlost hmotného bodu vzhledem k vnějšímu pozorovateli v inerciální vztažné soustavě S' . Předpokládejme, že se hmotný bod pohybuje vůči *točně* (soustava S) stálou rychlostí $\vec{v}$. V okamžiku $t = 0$ nechť je tato rychlost rovnoběžná se souřadnicovými osami

x a x' soustav S a S' , které v tomto okamžiku splývají (viz obrázek). Dále předpokládejme, že v okamžiku $t = 0$ je hmotný bod ve vzdálenosti r od středu točny. Po uplynutí doby Δt je hmotný bod na ose x ve vzdálenosti $r + v\Delta t$ od středu točny, zatímco jeho spojnice se středem točny svírá s osou x' úhel $\omega\Delta t$. Označme $\vec{U}_1$ vektor unášivé rychlosti, odpovídající místu na točně, v němž se hmotný bod nachází v okamžiku $t = 0$ a $\vec{U}_2$ odpovídající unášivou rychlost v okamžiku Δt . V soustavě pozorovatele S' mají tyto vektory složky

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= (U'_{1x}, U'_{1y}) = (0, r\omega) \\ \vec{U}_2 &= (U'_{2x}, U'_{2y}) = (-(r + v\Delta t)\omega \sin \omega\Delta t, (r + v\Delta t)\omega \cos \omega\Delta t).\end{aligned}$$



Rychlost hmotného bodu vzhledem k S' je $\vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \vec{U}(t)$, v okamžicích $t = 0$ a Δt pak ve složkách

$$\begin{aligned}\vec{w}(0) &= (w'_x(0), w'_y(0)) = (v, r\omega) \\ \vec{w}(\Delta t) &= (w'_x(\Delta t), w'_y(\Delta t)) \\ &= (v \cos \omega\Delta t - (r + v\Delta t)\omega \sin \omega\Delta t, v \sin \omega\Delta t + (r + v\Delta t)\omega \cos \omega\Delta t).\end{aligned}$$

Změna rychlosti je pak

$$\begin{aligned}\Delta \vec{w} &= (\Delta w'_x, \Delta w'_y) \\ &= (v(\cos \omega\Delta t - 1) - (r + v\Delta t)\omega \sin \omega\Delta t, \\ &\quad v \sin \omega\Delta t + r\omega(\cos \omega\Delta t - 1) + v\omega\Delta t \cos \omega\Delta t).\end{aligned}$$

Pro velmi krátké časové intervaly můžeme přibližně psát

$$\cos \omega\Delta t \approx 1, \quad \sin \omega\Delta t \approx \omega\Delta t,$$

a zanedbat výrazy, v nichž se vyskytne Δt ve vyšší mocnině než první. Pak

$$\Delta \vec{w} \approx (-r\omega^2 \Delta t, 2v\omega \Delta t).$$

Unášivé zrychlení je pak

$$\vec{A} = \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t} = (-r\omega^2, 2v\omega).$$

Prvá složka představuje známé dostředivé zrychlení. V neinerciální soustavě S spojené s točnou bude na hmotný bod působit kromě fiktivní odstředivé síly $\vec{F}_{\text{odstř}}^* = r\omega^2 \vec{n}$ další fiktivní síla, zvaná Coriolisova, $\vec{F}_{\text{Cor}}^* = -2v\omega \vec{\tau}$, kde $\vec{n}$ resp. $\vec{\tau}$ jsou jednotkové vektory ve směru osy x resp. y . Existence Coriolisovy síly zjevně souvisí s pohybem hmotného bodu vzhledem k neinerciální soustavě, neboť pro $v = 0$ tato síla vymizí. Dodejme, že podle výsledného vztahu je tato síla v každém okamžiku kolmá k rychlosti $\vec{v}$. Proto měl pan Tompkins pocit, že se nějaká síla snaží překazit jeho pohyb v radiálním směru, tj. od středu točny k jejímu obvodu.

Bude-li se pan Tompkins pohybovat po vodorovné točně stále rovnoměrně přímočaře, tj. s nulovým zrychlením, budou všechny síly, které na něj působí (skutečné i fiktivní), v rovnováze, tedy

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{odstř}}^* + \vec{F}_{\text{Cor}}^* = \vec{0} \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow T_x + m\omega^2 r = 0, \quad T_y - 2mv\omega = 0 \quad mg - N = 0, . \quad (2)$$

Aby pan Tompkins neuklouzl, nesmí velikost třecí síly překročit povolenou maximální hodnotu $T_{\text{max}} = Nf_0$ (viz úloha 2), tj.

$$m\omega\sqrt{\omega^2 r^2 + 4v^2} \leq Nf_0 \quad \Rightarrow \quad \omega\sqrt{\omega^2 r^2 + 4v^2} \leq gf_0.$$

V případě točny upravené tak, že náklon člověka vynucený existencí odstředivé síly (viz úloha 2) je kompenzován parabolickým tvarem podlahy (viz úloha 3), je situace poněkud složitější. Vztah (1) zůstává v platnosti, komponenty jednotlivých sil se však změni díky náklonu podlahy. Rozepsáním vztahu (1) dostáváme

$$T_x + N_x + m\omega^2 r = 0, \quad T_y - 2mv_x\omega = 0, \quad mg - T_z - N_z = 0, \quad (3)$$

kde v_x je x -ová komponenta rychlosti pana Tompkinse, tedy $v_x = v \cos \varphi$. Protože třecí síla $\vec{T}$ leží v tečné rovině k podlaze točny v místě, kde stojí pan Tompkins, reakce podložky $\vec{N}$ je k ní naopak kolmá, platí dále

$$T_z \cos \varphi = T_x \sin \varphi, \quad N_x \cos \varphi = -N_z \sin \varphi, \quad (4)$$

kde pro úhel sklonu podlahy φ platí (viz úloha 3) $\varphi = \omega^2 r / g$. Ze vztahů (3) a (4) snadno dostáváme

$$T_x = T_z = 0, \quad T = T_y = 2mv_x\omega, \quad N_x = -m\omega^2 r, \quad N_z = mg.$$

Potřebný sklon β způsobený silou Coriolisovou a měřený v rovině kolmé k ose x , lze zjistit analogickou úvahou jako v úloze 2

$$\text{tg } \beta = \frac{T_y}{N} = \frac{2v_x\omega}{\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2}}.$$

Dosazením za v_x

$$v_x = v \cos \varphi = \frac{v}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{gv}{\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2}},$$

dostáváme výsledný vztah pro sklon β

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2g\omega v}{g^2 + \omega^4 r^2}.$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme (pro $r = 0$, kdy je sklon zřejmě největší)

$$\beta \doteq 14^\circ.$$

Aby pan Tompkins neuklouzl, musí opět analogicky úloze 2 platit $T \leq T_{\max} = Nf_0$, tedy

$$2mv_x\omega = \frac{2mgv\omega}{\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2}} \leq mf_0\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2} \Rightarrow 2v\omega \leq gf_0 \left(1 + \frac{\omega^4 r^2}{g^2}\right).$$

Uvažme, že neuklouzne-li pan Tompkins uprostřed točny (tedy pro $r = 0$), neuklouzne zjevně ani pro r větší, a stačí tedy uvažovat podmínku

$$2v\omega \leq gf_0.$$

Dosazením číselných hodnot získáváme smutný výsledek, že pan Tompkins při pokusu opustit točnu uklouzne a zůstane tedy navždy uvězněn v jejím středu, pokud ho ovšem nenapadne, že běžet co nejrychleji k okraji není zrovna ten nejlepší způsob, jak točnu opustit.

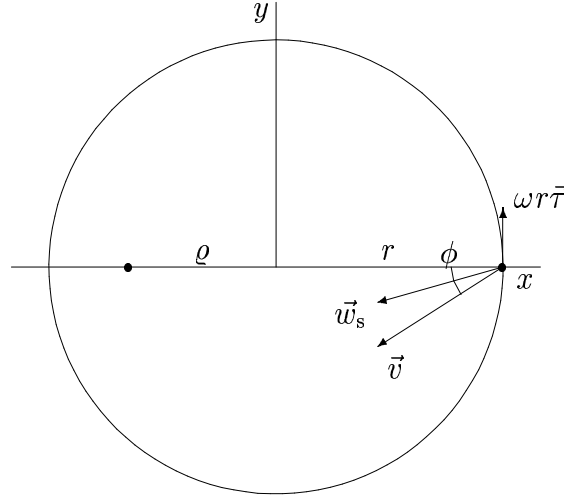
Poznámka 1 — komentář k doplňkovým problémům

(a) Problém budeme řešit v inerciální soustavě spojené se středem točny vzhledem k nezanedbatelným matematickým obtížím, které s sebou přináší jeho řešení v soustavě spojené s rotující točnou. Označme r vzdálenost prvního z duelantů od středu točny, druhý nechť stojí na přímce procházející místem, kde stojí první a středem točny, ve vzdálenosti ϱ od středu točny, na opačné straně než první. Zvolme soustavu souřadnic podle obrázku a označme $\vec{v}$ rychlost střely v soustavě spojené se střelcem, $\vec{w}_s$ její rychlost v inerciální vztažné soustavě a ϕ úhel, o který musí první duelant mířit vedle (viz obrázek). Rychlost střely je pak zřejmě rovna

$$\vec{w}_s = (-v \cos \phi, \omega r - v \sin \phi)$$

a její poloha v závislosti na čase

$$\vec{r}_s = (r - vt \cos \phi, \omega r t - vt \sin \phi),$$



zatímco poloha jeho soka je

$$\vec{r}_2 = (-\varrho \cos \omega t, -\varrho \sin \omega t).$$

Srovnáním dostáváme soustavu rovnic

$$r - vt \cos \phi = -\varrho \cos \omega t$$

$$\omega r t - vt \sin \phi = -\varrho \sin \omega t$$

z níž je možné určit úhel ϕ , který střelce pravděpodobně zajímá nejvíce. Tyto rovnice však nejsou obecně řešitelné analyticky, je tedy nutné je řešit numericky či graficky. Analyticky řešitelné jsou případy $r = R$, $\varrho = 0$ resp. $r = 0$, $\varrho = R$, které odpovídají situaci, kdy první duelant stojí na obvodu točny a druhý v jejím středu resp. situaci obrácené. Pro ně snadno dostáváme

$$\sin \phi = \frac{\omega v}{R} \quad \text{resp.} \quad \phi = \frac{\omega v}{R}.$$

V těchto případech byla korekce ϕ způsobena pouze změnou počáteční rychlosti střely díky pohybu střelce resp. pohybem cíle. V případě, kdy stojí oba sokové na obvodu točny, se oba vlivy skládají a problém již není analyticky řešitelný, lze však očekávat, že odchylka ϕ bude větší než v prvních dvou případech.

(b) Zavěsíme-li kyvadlo nejprve do rovnovážné polohy, a pak mu udělíme rychlost $\vec{v}$, bude z pohledu pozorovatele v soustavě spojené se Zemí jeho trajektorie zakřívována působením Coriolisovy síly, která způsobí stáčení roviny kyvu se stejnou úhlovou rychlostí jako je úhlová rychlost rotace Země, což je zřejmé z pohledu pozorovatele v inerciální vztažné soustavě. V tomto případě bude kyvadlo při každém kyvu procházet rovnovážnou polohou nad severním pólem. Pokud však kyvadlo uvedeme do pohybu tak, že ho vychýlíme z rovnovážné polohy, podržíme v klidu vůči Zemi, a pak volně vypustíme, bude ho Coriolisova síla vychylovat během jeho návratu do rovnovážné polohy, nejnižší bod jeho trajektorie tedy nebude nad pólem ale vždy o kousek vedle. Z pohledu pozorovatele v inerciální vztažné soustavě lze tuto skutečnost snadno vysvětlit, uvážíme-li, že tím, že kyvadlo podržíme v klidu vůči Zemi, udělíme mu z hlediska inerciální soustavy určitou počáteční rychlost ve směru kolmém k rovině kyvu, ze zákona zachování momentu hybnosti je pak zřejmé, že kyvadlo nikdy nemůže při svém pohybu procházet rovnovážnou polohou. Zjištění úhlové rychlosti stáčení roviny kyvu je v tomto případě překvapivé

nesrovnatelně složitější než v případě prvním. Kyvadlo je zde totiž třeba považovat za sférické (tj. vázané na kulovou plochu, nikoli pouze na její průnik s rovinou), pohybové rovnice sférického kyvadla však není obecně možné vyřešit analyticky, je tedy nutné řešit je přibližně nebo numericky. Při pohybu sférického kyvadla dochází ke stáčení roviny kyvu, které se skládá se stáčením způsobeným neinerciálností soustavy spojené se Zemí, výsledná úhlová rychlost stáčení roviny kyvu se pak mění v závislosti na délce kyvadla a počáteční výchylce.

(c) Problém řešme opět v inerciální vztažné soustavě. Označíme-li r výšku geostacionární družice nad povrchem Země, ω_0 úhlovou rychlost rotace Země, R její poloměr, je odchylka d zřejmě rovna součinu času, který potřebuje světelný paprsek k překonání vzdálenosti z družice na zemský povrch, tedy r/c a obvodové rychlosti rotace zemského povrchu na rovníku, tedy $\omega_0 R$

$$d = \frac{r}{c} \omega_0 R,$$

kde c označuje rychlost světla (uvažme, že rychlost družice je mnohem menší než rychlost světla). Dosazením číselných hodnot dostáváme $d \doteq 60$ m.

Vzorové řešení úlohy č.5 (5 bodů)

Na cestě domů

Výsledná síla, díky níž se pan Tompkins pohybuje se zrychlením $\vec{a}$ vzhledem k vlaku i vzhledem k nástupišti, je třecí síla $\vec{T}$, kterou při chůzi působí podlaha vlaku na boty pana Tompkinse. Za dobu Δt se rychlost pana Tompkinse vzhledem k nástupišti změní z $\vec{v}$ na $\vec{v} + \vec{a}\Delta t$. Změna kinetické energie vzhledem k nástupišti je pak

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v + a\Delta t)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2\Delta t^2 + mav\Delta t.$$

Přírůstek kinetické energie pana Tompkinse vzhledem k vlaku je však pouze

$$\Delta E'_k = \frac{1}{2}m(a\Delta t)^2,$$

neboť jeho počáteční rychlost vzhledem k vlaku je nulová. Rozdíl obou přírůstků je

$$\delta E_k = \Delta E_k - \Delta E'_k = mav\Delta t.$$

Rozdíl je způsoben tím, že síla $\vec{T} = m\vec{a}$ působila z hlediska pozorovatele na nástupišti po celkové dráze $\Delta s = v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ a vykonala tedy práci

$$\Delta W = Ts = ma\Delta s = ma(v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2) = \Delta E_k,$$

zatímco z hlediska pana Tompkinse konala práci ΔW^* pouze po dráze $\Delta s' = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$, tj.

$$\Delta W^* = T\Delta s' = ma\Delta s' = \frac{1}{2}ma^2(\Delta t)^2 = \Delta E'_k.$$

Pro vysvětlení této disproporce musíme uvažovat nejen o pohybu pana Tompkinse, ale o soustavě tvořené vlakem a panem Tompkinsem jako celku. Síla $\vec{T}$, jíž působí podlaha vlaku na pana Tompkinse, není jedinou silou, která při popsaném ději koná práci. Pan Tompkins působí současně silou $-\vec{T}$ na podlahu vlaku. (Tyto síly jsou z hlediska soustavy vlak - člověk silami vnitřními.) Kdyby na soustavu nepůsobily žádné další síly, začal by se vlak brzdít, neboť hybnost soustavy by se zachovávala. Aby se však vlak pohyboval stálou rychlostí $\vec{v}$, jak požaduje zadání, musí koleje působit na vlak dodatečnou silou $\vec{F}$, k jejímuž vzniku musí dojít zvýšením tažné síly motoru vlaku, tj. „přiložením do kotle“. Pak platí:

$$m\vec{a} = \vec{T} , \quad -\vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} .$$

Za dobu Δt urazí vlak dráhu $\Delta l = v\Delta t$, takže síla $\vec{F}$ vykoná práci

$$\Delta W' = F\Delta l = mav\Delta t ,$$

rovnou právě rozdílu kinetických energií ΔE_k a $\Delta E'_k$. Síla $-\vec{T}$, jíž působí pan Tompkins na podlahu vagónu, vykoná po dráze Δl práci $-\Delta W' = -mav\Delta t$. Ta je rovna práci svalů pana Tompkinse. Celková práce ΔW_{celk} , kterou vykonaly během doby Δt všechny zúčastněné síly, tj. $\vec{T}$, $-\vec{T}$ a $\vec{F}$, musí být rovna celkové změně kinetické energie soustavy vzhledem k nástupišti. Síla $\vec{T}$ působila po dráze Δs a síly $-\vec{T}$ a $\vec{F}$ po dráze Δl . Je tedy

$$\Delta W_{celk} = T\Delta s + (-T)\Delta l + F\Delta l ,$$

a skutečně

$$\Delta W_{celk} = \Delta E_k .$$

Veličina $\Delta E'_k$ má význam celkové práce vnitřních sil soustavy, tj. součtu prací síly $\vec{T}$ a síly $-\vec{T}$:

$$\Delta W_T + \Delta W_{-T} = T\Delta s + (-T)\Delta l = ma(\Delta s - \Delta l) = \frac{1}{2}ma^2(\Delta t)^2 = \Delta E'_k .$$

Pozn.: Velká část řešitelů nevzala v úvahu zákon zachování energie, ze kterého plyne, že lokomotiva musela vykonat práci, aby si udržela konstantní rychlost.