

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

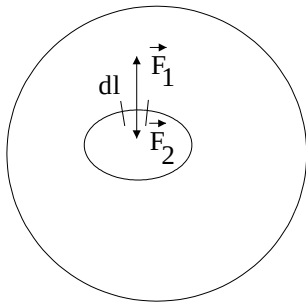
4. ročník — 1997/1998

Vzorová řešení 3. série úloh (25 bodů)

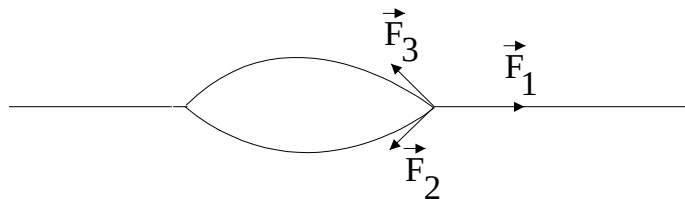
Vzorové řešení úlohy č.1 (8 bodů)

Domácí experimenty

- (a) Pepř budeme považovat za zkušební tělíska, která mohou být unášena pohybující se hladinou. Před přidáním saponátu jsou povrchové síly v rovnováze, hladina (ani pepř) se nepohybují. Přidáním saponátu se lokálně sníží povrchové napětí roztoku σ a s ním i povrchové síly, které jsou σ úměrné. Uvažujme molekuly na hranici voda – voda + saponát. Síla $\vec{F}_1$, což je výslednice přitažlivých sil, kterými na hraniční molekuly působí sousední molekuly vody, bude větší než síla $\vec{F}_2$ - výslednice přitažlivých sil, kterými na ně působí molekuly roztoku vody a saponátu. Proto se vodní hladina „stáhne“ ve směru síly $\vec{F}_1$.
- (b) Přidáním saponátu se sníží povrchové napětí roztoku uvnitř smyčky. Na úsek niti Δl bude okolní kapalina působit povrchovými silami $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$, viz obr. 1. Protože je povrchové napětí vně smyčky větší než uvnitř, bude velikost síly $\vec{F}_1$ větší než velikost síly $\vec{F}_2$. Nit se proto posune ve směru síly $\vec{F}_1$. Smyčka zaujme přibližně tvar kružnice. Kruhový tvar smyčky můžeme vysvětlit následující úvahou. Systém spěje do stavu s minimální povrchovou energií hladiny; ta je dána součtem povrchové energie vody a roztoku voda + saponát. Při fixovaném obvodu hladiny s menším σ (délka niti) a celkové ploše hladiny bude povrchová energie minimální v případě, že plocha s menším σ bude maximální. Při daném obvodu má největší plochu kruh.



obr. 1



obr. 2

- (c) Na výsledné síle, kterou působí okolní prostředí na hraniční molekuly na rozhraní voda – olej – vzduch, se podílí tři složky. Síla $\vec{F}_1$ úměrná povrchovému napětí $\sigma_{voda-vzduch}$, síla $\vec{F}_2$ úměrná povrchovému napětí $\sigma_{voda-olej}$ a síla $\vec{F}_3$ úměrná povrchovému napětí $\sigma_{olej-vzduch}$ - viz obr. 2. Jestliže jejich výslednice $\vec{F}$ směřuje ven z olejové kapky, nelze dosáhnout rovnováhy na kontaktní linii a olej se bude po vodní hladině roztékat. Toto nastane, bude-li:

$$\sigma_{voda-vzduch} > \sigma_{voda-olej} + \sigma_{olej-vzduch} \quad (1)$$

V případě, že je výslednice povrchových sil nulová nebo směřuje do kapky, kapka se udrží pohromadě. Tomu odpovídá podmínka:

$$\sigma_{voda-vzduch} < \sigma_{voda-olej} + \sigma_{olej-vzduch} \quad (2)$$

Pro olej uvedený v zadání jsou tabelovány následující hodnoty: $\sigma_{voda-vzduch} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$, $\sigma_{voda-olej} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$ a $\sigma_{olej-vzduch} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$. Nastává případ (??) a kapka oleje se po vodní hladině roztéká. Vytvoří se tenký olejový film, na němž mohou rychle probíhat chemické reakce. Je-li množství oleje dostatečně malé, změní se v důsledku chemických reakcí povrchová napětí natolik, že bude splněna podmínka (??). Olej začne tvořit na hladině kapky. Přidáním saponátu do vody se sníží povrchové napětí ($\sigma_{voda+saponat-vzduch} < \sigma_{voda-vzduch}$), což tvorbu olejových čoček ještě urychlí.

- (d) Uvnitř mýdlové (bublifukové) bubliny je kapilární tlak roven $p_k = \frac{4\sigma}{R}$, kde R je poloměr kulové bubliny a σ je povrchové napětí mýdlového (bublifukového) roztoku. Proto v menší bublině bude větší kapilární tlak než ve větší bublině. Přetlak v menší bublině způsobí, že po spojení začne proudit vzduch z menší bubliny do větší. (Pozorujeme, že menší bublina se stále zmenšuje, až zanikne.)
- (e) Voda materiál, z něhož je vyroben dvacetihalér, nesmáčí (to znamená, že pro stykový úhel platí $\theta > \frac{\pi}{2}$). Na element obvodu mince Δl působí kapalina povrchovou silou $\Delta \vec{F}_p = \sigma \cdot \Delta l \cdot \vec{\tau}$, kde $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor tečný k hladině. Výslednice povrchových

sil je dána: $\vec{F}_p = \sum \Delta \vec{F}_p$. Ze symetrie plyne, že $\vec{F}_p$ má nenulovou pouze vertikální složku, protože horizontální složky sil $\Delta \vec{F}_p$ se navzájem vyruší. Kapalina na minci působí také hydrostatickou vztlakovou silou $F_v = (h + t)S \rho g$, kde h je ponor mince pod úroveň hladiny, t tloušťka mince, S obsah podstavy a ρ hustota kapaliny. Na minci dále působí tíhová síla F_g . Mince se na hladině ustálí při takovém h , kdy výsledná síla působící na minci bude nulová.

- (f) Provedené experimenty vedou k následujícímu závěru: pokud dva volně plovoucí objekty hladinu současně zvedají nebo stlačují, pak se vzájemně přitahují (například víčko s víčkem, dvacetihalěr s dvacetihalěrem), pokud jeden z nich hladinu stlačuje a druhý zvedá, vzájemně se odpuzují. Jedním z objektů může být i stěna nádoby, ve které předmět plave (okraj skleněné misky víčko přitahuje, minci odpuzuje). Fyzikální výklad jevu je komplikovaný složitou geometrií problému a velkou citlivostí povrchových napětí na příměsi a stav povrchu.

Provedme proto zjednodušení a uvažujme místo dvacetihalěrů a víček plovoucí rovnoběžná pravítka, která mají v řezu tvar obdélníku se zaoblenými hranami. Pravítko „dvacetihalěr“ hladinu stlačuje, pravičko „víčko“ naopak zvedá.

Při přibližování pravítek se mění tvar hladiny a (při splnění podmínek platnosti pravidla o konstantním stykovém úhlu) i místo jejího dotyku s pravičkem (kontaktní linie). Výklad jevu lze založit na analýze porušení původní rovnováhy horizontální projekce sil povrchového napětí, kterými voda působí na obě strany pravítka, a tlakových sil, kterými působí okolní prostředí na jeho boční stěny (důsledek kapilární elevace nebo deprese hladiny). Nerovnováha sil je doprovázena vznikem klopných momentů, které pravítka naklání a situaci značně komplikují. Výklad je však i v případě, že náklon neuvažujeme, velmi rozsáhlý vzhledem k mnoha možnostem, které se mohou realizovat. Z těchto důvodů analýzu pouze naznačíme.

Považujme podmínky platnosti pravidla o konstantnosti stykového úhlu za splněné a předpokládejme, že hladina se neustále dotýká jen svislé stěny pravítka. Pak je zřejmé, že výslednice horizontální složky sil povrchového napětí, kterými působí hladina na pravičko, zůstává nulová nezávisle na vzájemné vzdálenosti obou pravítek. (Nezachovává se ovšem působíště sil, proto vzniká malý klopný moment.) Posunutí kontaktní linie na jedné straně pravítka vůči druhé způsobí, že v oblasti vymezené oběma hladinami nastane nesymetrie tlakových sil. Na jedné straně pravítka je tedy oblast s atmosférickým tlakem, na straně druhé stejně veliká oblast, kde se k hodnotě atmosférického tlaku přičítá (odečítá) hydrostatický tlak vodního sloupce (měřeného od úrovně hladiny v nekonečnu - v rovině určené hladinou v nekonečnu je všude tlak roven atmosférickému tlaku). Tlak v kapalině v závislosti na souřadnici y je dán vztahem

$$p(y) = p_{\text{atm.}} - y \rho g .$$

Předpokládejme, že s klesající vzájemnou vzdáleností pravítek kontaktní linie a úroveň hladiny mezi nimi stoupá (kapilární elevace). Na vnitřních stěnách je oproti vnějším atmosférický tlak snížen o tlak vodního sloupce a pravítka se tedy budou přitahovat (viz obr. 3a). Budeme-li předpokládat opačnou situaci (kapilární deprese), na vnější stěně pravítek oproti vnitřní bude atmosférický tlak zvýšen a pravítka se budou opět přitahovat (viz obr. 3b). Kombinovaný případ kapilární elevace na stěně jednoho pravítka a deprese na stěně druhého pravítka vede při vzájemném přibližování

vání ke změně polohy kontaktní linie na straně každého z nich v opačném směru, než tomu bylo v případech, kdy se vzájemně přitahovala. To tedy znamená, že objekty se budou odpuzovat (viz obr. 3c).

Předpokládáme-li, že hladina je v kontaktu s horním zaobleným okrajem, pak v důsledku vzájemného přibližování pravítek nastává změna tvaru hladiny a polohy kontaktní linie na kruhovém zaoblení podle podmínky o stálosti stykového úhlu. Tedy (na rozdíl od předešlého případu) horizontální projekce sil povrchového napětí závisí na vzdálenosti obou pravítek. Výsledné chování dvojic objektů je stejné jako v předchozím případě (obr. 4).

Vzhledem k tomu, že voda (zvláště ta, kterou získáme z vodovodu) je chemicky poměrně aktivní, setrvá-li kontaktní linie po dostatečně dlouhou dobu v jednom místě, mohou nastat současným působením atmosférických plynů, vody a solí v ní obsažených změny stavu povrchu. V místě kontaktu hladiny se tak může vytvořit lineární oblast, vůči které má voda jiné (třeba větší) povrchové napětí. Hladina má pak tendenci v tomto místě ulpívat. V tomto případě nastává popsaná interakce objektů porušením rovnováhy horizontální projekce sil povrchového napětí změnou úhlu kontaktu hladiny se stěnou (obr. 5).

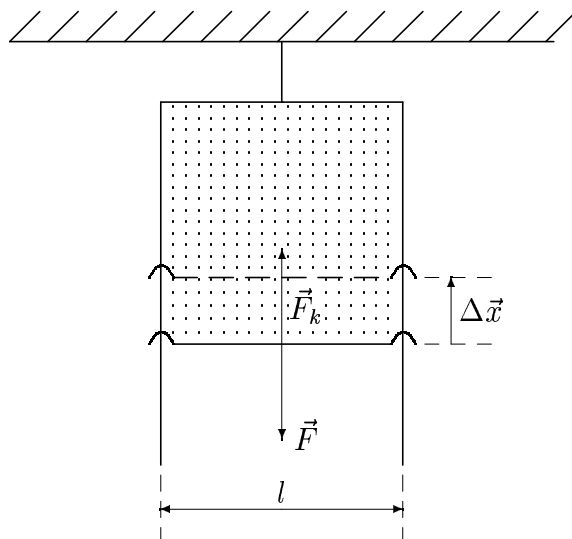
V reálném případě se na interakci pravítek budou podílet výše uvedené jevy v určité vzájemné kombinaci. Reálná situace je navíc velmi komplikována složitější geometrií než v případě plovoucích pravítek. Mohou se uplatnit různé jemnosti, které souvisejí s tím, že kontaktní linie není přímková. Pro kvalitativní popis chování plovoucích objektů větších rozměrů je však model pravítek užitečný.

Tento experiment je příkladem toho, jak je důležité provádět přesná pozorování. Právě dobře dokumentované pozorování, které by poskytlo všechny podstatné údaje pro pokus o fyzikální výklad, jsme vesměs ve vašich textech postrádali.

Vzorové řešení úlohy č.2 (4 body)

a) Kapalinová vrstva působí na pohyblivou stěnu rámečku silou $\vec{F}_k = \sigma L \vec{n}$ (viz obr. 6), $\vec{n}$ je jednotkový vektor ve směru této síly a L je délka rozhraní blána – pohyblivá stěna. Protože blána má dva povrchy, je $L = 2l$. Má-li zůstat pohyblivá stěna v klidu, musíme na ni působit stejně velkou silou opačného směru $\vec{F} = -\vec{F}_k = -2\sigma l \vec{n}$, velikost této síly je tedy

$$F = 2\sigma l.$$



Obr. 6

b) Posune-li povrchová síla pohyblivou stěnu rámečku o $\Delta \vec{x}$, vykoná práci

$$W = \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{x}.$$

Protože vektory $\vec{F}_k$ a $\Delta \vec{x}$ jsou souhlasně rovnoběžné, bude

$$W = |\vec{F}_k| |\Delta \vec{x}| = 2\sigma l \Delta x.$$

Kapalina koná práci W na úkor své povrchové energie, ta se v důsledku toho zmenší o ΔE_p . Při posunutí pohyblivé stěny rámečku došlo k zmenšení povrchu kapaliny o $\Delta S = 2l \Delta x$ (blána má dva povrchy) a úbytku povrchové energie o $\Delta E_p = W = 2\sigma l \Delta x$. Povrchová energie na jednotku plochy je tedy potom skutečně

$$\frac{\Delta E_p}{\Delta S} = \frac{2\sigma l \Delta x}{2l \Delta x} = \sigma.$$

c) Při výpočtu budeme předpokládat, že energie povrchových vrstev vzniklých kapiček se rovná mechanické energii rozpadající se kapky. Ta se skládá jednak z její povrchové energie, jednak z její energie kinetické (velikostí odpovídající počáteční energii potenciální mgh). Odtud pro případ, kdy se původní kapka rozpadne na dvě stejně velké kapky, dostáváme

$$mgh + S\sigma = S_{\frac{1}{2}}\sigma + S_{\frac{1}{2}}\sigma,$$

kde S a $S_{\frac{1}{2}}$ označují povrchy původní a každé z nově vzniklých kapek. Pro hmotnost kapky platí $m = V\rho$. Po dosazení a úpravě obdržíme pro výšku h vztah

$$h = \frac{\sigma(2S_{\frac{1}{2}} - S)}{V\rho g} = \frac{\sigma\Delta S}{V\rho g}.$$

Pro hledanou výšku dopadu je tedy rozhodující rozdíl celkového povrchu nově vzniklých kapek a povrchu původní kapky.

Původní kapka měla objem $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ a povrch $S = \pi d^2$. Pokud se tato kapka rozpadne na dvě stejně velké kapky, budou mít obě nově vzniklé kapky objem rovný polovině objemu původní kapky

$$V_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}V = \frac{1}{12}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi d_{\frac{1}{2}}^3 \Rightarrow d_{\frac{1}{2}} = d\sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

odtud

$$S_{\frac{1}{2}} = \pi d_{\frac{1}{2}}^2 = \pi d^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pro rozdíl povrchů kapek potom platí

$$\Delta S = \left(2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) \pi d^2.$$

Pro výšku h po úpravě dostaneme

$$h = \frac{6 \left(2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)}{\rho\sigma g} \doteq 1.89 \text{ mm}.$$

Požadujeme-li, aby objemy nově vzniklých kapek byly v poměru 1:2, postupujeme analogicky jako v prvním případě.

$$V_{\frac{1}{3}} + V_{\frac{2}{3}} = V,$$

$$V_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi d_{\frac{1}{3}}^3 \Rightarrow d_{\frac{1}{3}} = d\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \Rightarrow S_{\frac{1}{3}} = \pi d^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$V_{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi d_{\frac{2}{3}}^3 \Rightarrow d_{\frac{2}{3}} = d\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow S_{\frac{2}{3}} = \pi d^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pro rozdíl povrchů kapek potom platí

$$\Delta S = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) \pi d^2$$

a po dosazení obdržíme výsledek

$$h = \frac{6 \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)}{\rho\sigma g} \doteq 1.78 \text{ mm}.$$

Vzorové řešení úlohy č.3 (6 bodů)

(a) K vypaření kapalinového tělesa o hmotnosti m je potřeba dodat energii

$$W_v = ml_v,$$

kde l_v je měrné skupenské teplo vypařování. Hmotnost kapalinového tělesa m můžeme vyjádřit jako $m = \rho V$, přičemž objem V je roven součinu počtu molekul N a objemu připadajícího na jednu molekulu V_0

$$m = \rho NV_0. \quad (1)$$

Předpokládáme-li, že jednotlivé molekuly lze považovat za elementární kapalinová tělíska (tzn. lze jim přisoudit povrchovou energii), je možné energii W_v odhadnout jako změnu energie povrchové vrstvy kapaliny ΔE_σ , která souvisí se zvětšením povrchu při „rozbíjení“ kapalinového tělesa na jednotlivé molekuly. Platí tedy

$$\Delta E_\sigma = W_v. \quad (2)$$

Pro odhad změny povrchu použijme následující zjednodušený model. Uvažujme, že molekula má tvar koule o poloměru r a molekuly jsou v kapalině těsně uspořádány. Tento předpoklad lze odůvodnit nestlačitelností kapaliny. Nyní je potřeba určit, jaký objem V_0 připadá na jednu molekulu v kapalině. Na následujícím obrázku je znázorněna elementární buňka modelu kapaliny, která obsahuje celkem 4 molekuly ($8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2}$ molekuly).

Užitím Pythagorovy věty dostaneme

$$V_0 = 4\sqrt{2} r^3. \quad (3)$$

Po vypaření kapalinového tělesa vzroste celkový povrch z S na NS_0 , kde S_0 je povrch jedné molekuly. Změna povrchu je tedy $\Delta S = NS_0 - S$. Protože S je vzhledem k S_0 zanedbatelné, lze změnu povrchu ΔS psát jako

$$\Delta S \approx NS_0 = N4\pi r^2.$$

Pro změnu energie povrchové vrstvy kapaliny ΔE_σ tedy platí

$$\Delta E_\sigma = \Delta S \sigma = NS_0 \sigma.$$

Dosazením do (??) pak dostáváme

$$ml_v = NS_0\sigma$$

a dosazením za m a V_0 z (??) a (??) pak

$$\varrho N 4\sqrt{2} r^3 l_v = N 4\pi r^2 \sigma.$$

Odtud snadno vyjádříme poloměr molekuly

$$r = \frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}l_v\varrho}.$$

(b) Po dosazení konkrétních hodnot pro molekulu vody $\sigma = 73,0e-3Nm^{-1}$, $l_v = 2,257e6Jkg^{-1}$, $\varrho = 998,4kgm^{-3}$, dostáváme

$$r_{H_2O} \doteq 7,2e-11m|.$$

Pro srovnání uvádíme tabelovanou hodnotou délky vazby O–H $9.7e-11\text{ m}$ —.

(c) Nyní se zamysleme nad úvahami, které nás dovedly k tomuto relativně uspokojivému výsledku. Zásadním nedostatkem uvedeného postupu je předpoklad, že molekule přísluší povrchová energie, který je zcela nereálný. Povrchové napětí je makroskopická veličina, která souvisí s kolektivním chováním molekul a atomů na povrchu kapaliny, nemá proto smysl přiřazovat je jednotlivým molekulám.

Dalším předpokladem, který neodpovídá skutečnosti, byla aproximace tvaru molekuly koulí. Při použití modelu těsného uspořádání molekul v kapalině bylo zanedbáno jejich vzájemné působení a vazby mezi nimi. Například právě molekuly vody vytvářejí v kapalině vodíkové vazby, které mají významný vliv na jejich prostorové uspořádání. Vidíme tedy, že relativně vysoká přesnost výsledku je spíše dílem náhody.

Všichni řešitelé vyjádřili poloměr molekuly r pomocí veličin σ , l_v a ϱ ve tvaru $r = K \frac{\sigma}{l_v\varrho}$. Jednotlivá řešení se lišila pouze konstantou K , která je závislá na modelu uspořádání molekul v kapalině. Někteří řešitelé se však asi zalekli zanedbání povrchu kapalného tělesa při stanovení změny povrchu ΔS , což samozřejmě ztížilo další výpočty.

Vzorové řešení úlohy č.4 (7 bodů)

- (a) Provedení tohoto experimentu by mělo přispět k získání lepší představy o chování kapaliny při řešení následujících úkolů. Výška hladiny se při správném provedení

pohybuje mezi 3-5mm nad okrajem nádoby. Na výsledek má vliv řada faktorů jako např.: materiál nádoby, tvar okraje, čistota a teplota vody či otřesy nádoby. V případě dokonale nesmáčené stěny nádoby lze pozorovat vývoj tvaru hladiny, jak je uvedeno na obr. 8. Stav v bodě **3** je již značně nestabilní.

- (b) Představme si, jak by vypadala situace po dosažení maximální výšky čepičky, kterou daný text popisuje. Po dalším doplnění sebemenšího množství vody by dle autora stejné množství vody oteklo po stěně nádoby. V případě kontinuálního doplňování vody by si čepička udržovala svou stálou výšku a přebytečná voda by odtékala po stěně. Pokud se Vám náhodou podařilo nádobu přelít při provádění předchozího experimentu, jistě víte, že to neodpovídá reálné situaci. Po překonání kritického stavu odeče více vody, než byl stav před dodáním „poslední kapky“. K přetečení jistě nedojde „protržením povrchové blány“, ale situaci je možné spíše přirovnat k odkapávání kapek z ústí kapiláry. Nejprve se vyvíjí polokulovitá kapka, jejíž část se po překročení kritického stavu oddělí mechanismem zúžení krčku.

Populárnímu charakteru textu odpovídají fyzikálně méně přesné formulace. Namísto „váha“ je vhodnější výraz „tíha“, tlak samozřejmě není vyvolán jen „na úrovni okraje sklenice“, ale na celém zakřiveném povrchu kapaliny a na okraji pouze dosahuje maximální hodnoty. Je možné polemizovat i o termínu „povrchová blána“.

- (c) • Na minci působí tyto tři síly (viz obr. 9): tíhová síla $\vec{F}_G$, hydrostatická vztlaková síla $\vec{F}_{vz}$ a síla $\vec{F}_p$, která je výslednicí sil povrchového napětí, jimiž kapalina působí na elementy obvodu mince.

Část řešitelů nesprávně uvažovala vliv atmosférického tlaku p_a , což se později projevilo v chybném určení podmínky pro plavání mince. Zde je důležité si uvědomit, že atmosférický tlak p_a působí jak na horní plochu mince, tak současně i na okolní hladinu. Podle Pascalova zákona vyvolává v každém bodě kapaliny stejný tlak p_a a na spodní plochu mince pak působí celkový tlak $(h+t)\rho_0 g + p_a$. Výslednice tlakových sil odpovídá rozdílu tlakových sil působících na dolní a horní stranu mince a je tedy rovna $(h+t)\rho_0 g$.

- Velikost síly $|\vec{F}_p|$ snadno spočítáme podle obr. 10.

Známe obvod mince $o = 2\pi r$. Na element obvodu Δo působí síla $|\Delta \vec{F}| = \sigma \Delta o$, kterou si můžeme v rovině xz rozložit na dvě nezávislé složky $\Delta \vec{F}_x$ a $\Delta \vec{F}_z$. Složky $\Delta \vec{F}_x$ se vzhledem k symetrii vzájemně vyruší. Složka $\Delta \vec{F}_z$ má velikost $\Delta \vec{F}_z = |\Delta \vec{F}| \sin \Theta$. Síla $|\vec{F}_p|$ se rovná součtu všech $\Delta \vec{F}_z$, tedy

$$|\vec{F}_p| = 2\pi r \sigma \sin \Theta.$$

V případě, že úhel $\Theta = \frac{\pi}{2}$, nabývá $|\vec{F}_p|$ maximální hodnoty $|\vec{F}_p| = 2\pi r \sigma$.

Naopak, je-li $\Theta = \pi$, působí síly $|\Delta \vec{F}|$ v rovině proti sobě, vzájemně se vyruší a tudíž $|\vec{F}_p| = 0$.

- Mince může v klidu spočívat na hladině jen tehdy, je-li výslednice všech sil na ni působících nulová. Výraz

$$|\vec{F}_{vz}| + |\vec{F}_p| - |\vec{F}_G| = 0,$$

je tedy podmínkou plavání mince. Po dosazení za $|\vec{F}_{vz}| = S(t+h)\rho_0 g$, $|\vec{F}_G| = S t \rho g$ a $|\vec{F}_p| = 2\pi r \sigma \sin \Theta$ dostaneme

$$S(t+h)\rho_0 g + 2\pi r \sigma \sin \Theta - S t \rho g = 0.$$

Křivky spojující místa se stejným tlakem, tzv. izobary, odpovídají ekvipotenčními hladinám. Pokud by tomu tak nebylo, kapalina by nemohla být v rovnováze a docházelo by v ní vlivem tíhové síly k tokům. Z grafu závislosti tlaku p na výšce h (obr. 11) je patrný průběh tlaku i jeho skoková změna na rozhraní vzduch-kapalina.

Část **A** představuje průběh tlaku vzduchu s klesající výškou, část **B** skokovou změnu tlaku na rozhraní a část **C** nárůst hydrostatického tlaku s hloubkou.

- Při řešení tohoto úkolu využijeme skutečnosti, že se mince nachází v rovnovážném stavu. Je-li $\Theta = \pi$, pak síla $|\vec{F}_p| = 0$ a mince tedy plave jen díky působení vztlačkové síly $|\vec{F}_{vz}| = S(t+h)\rho_0 g$, která působí na dolní plochu mince S . Lze si však také představit, že povrch hladiny náhle „zamrzne“ a vytvoří nekonečně tenkou nehmotnou skořápku spojenou s mincí. Na takto vzniklý objekt můžeme pohlížet jako na plovoucí těleso a aplikovat Archimédův zákon $|\vec{F}_{vz}^*| = V\rho g$, kde V je objem vytlačený tímto tělesem. Porovnáme-li vztahy pro $|\vec{F}_{vz}|$ a $|\vec{F}_{vz}^*|$, je zřejmé, že oba objemy V a $S(t+h)$ musí být stejné a tudíž jsou stejné i vyšrafovaný a vytečkovaný objem vně a uvnitř čárkovaného válce (viz obrázek v zadání).

Vzorové řešení úlohy č. 5 (prémiová)

Uveďme nejprve definice prodyšnosti a nepromokavosti látky používané v technické praxi a odpovídající souvislostem, v nichž se tyto pojmy vyskytují v zadání úlohy. Prodyšnost χ látky definujeme vztahem

$$V = \chi S t \Delta p, \quad (1)$$

kde V značí objem plynu (vzduchu) prošlého plochou S látky za čas t při rozdílu tlaků Δp . Nepromokavost látky definujeme (pro vodu) jako tlak nejvyššího vodního sloupce, který tato látka udrží, aniž by začala vodu propouštět. Tento tlak je v technické praxi zvykem udávat přímo v metrech vodního sloupce.

Aby byla látka prodyšná, tedy aby propouštěla plyny, musí obsahovat otvory (každá tkanina samozřejmě má mezery mezi jednotlivými vlákny, onou „látkou“ však může být i tenká folie), a to v co největším počtu a velikosti, je však zjevné, že obsahuje-li látka otvory, nemůže už nikdy být dokonale nepromokavá. Nicméně lze velké nepromokavosti dosáhnout využitím povrchového napětí kapaliny. Bude-li totiž látka vyrobena z materiálu, který je nesmáčivý, budou síly povrchového napětí působit proti zvětšování styčné plochy kapaliny s látkou, a tedy i proti vnikání kapaliny do otvorů. Při dostatečně malých otvorech tak mohou síly povrchového napětí zabránit kapalině projít otvory.

Odhadněme, jak souvisí nepromokavost látky s velikostí otvorů. Uvažme pro jednoduchost otvory tvaru válce o poloměru r . Síla povrchového napětí F_p bránící proniknutí kapaliny skrz otvor je pak

$$F_p = 2\pi r \sigma \cos \vartheta, \quad (2)$$

kde σ je povrchové napětí a ϑ krajový úhel. Tlaková síla vodního sloupce je rovna součinu hydrostatického tlaku ρgh a plochy otvoru πr^2

$$F_v = \rho gh \pi r^2, \quad (3)$$

kde ρ je hustota vody, g tíhové zrychlení a h výška vodního sloupce. Protože $\cos \vartheta \geq -1$, vidíme, že největší výška, pro kterou je možné splnit podmínku rovnováhy $F_p + F_v = 0$ souvisí s poloměrem otvorů vztahem

$$h_{\max} r = \frac{2\sigma}{\rho g}. \quad (4)$$

Požadujeme-li tedy, aby látka udržela 1 metr vodního sloupce (tato hodnota zhruba odpovídá nepromokavosti TEFLONu HT, pro špičkové materiály jsou to desítky metrů), dostáváme $r \doteq 1,5e-5 \text{ m}$. V praxi ovšem motivy vztahující se k materiálu, ani k velikosti, nepromokavosti látky je třeba zohlednit.

Tkanina, která by současně vyhověla požadavkům nepromokavosti a prodyšnosti, musí být velmi hustě tkána z vláken z materiálu, který je nesmáčivý, tomuto požadavku vyhovuje řada umělých vláken (teflon) a většina kovů.

Kvantitativní určení prodyšnosti TEFLONu HT sice mělo být pouze orientační (vzhledem k použité metodě je správnost výsledků silně ovlivněna korektností hodnot sacího podtlaku udávaných výrobcí vysavačů). Přesto při pohledu na hodnoty zjištěné různými řešiteli, které jsou přibližně rovnoměrně rozloženy v rozsahu více než dvou řádů, jsme vystaveni pochybnostem, zda skutečně všichni řešitelé měřili prodyšnost téže látky. Orientační hodnota získaná autorem vzorového řešení při přetlaku $\Delta p \doteq 440 \text{ Pa}$ ležící zhruba v dohledu hodnoty $2,1e-4 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}$.

Ověření nepromokavosti látky naopak nečinilo potíže žádnému z řešitelů, kteří se o tomto experimentu zmiňují ve svých řešeních. Srovnáním výše uvedené hodnoty nepromokavosti TEFLONu HT a rozměrů běžných kelímků od jogurtu vidíme, že zjištěný výsledek, látka vodu nepropouští, je možné očekávat. Po potření tkaniny saponátem pozorujeme, že přes potřené místo začíná prokapávat voda. Tento výsledek má dvě příčiny. První příčinou je snížení povrchového napětí vody způsobené saponátem (na tomto principu saponáty pracují), které mělo za následek zmenšení sil povrchového napětí bránících proniknutí vody skrz látku. Druhou a v tomto případě pravděpodobně významnější příčinou je, že při potírání saponátem ze suché strany došlo k zaplnění otvorů v látce kapalinou. Síly povrchového napětí už pak nebránily pronikání kapaliny skrz otvory a kapalina začala protékat.

Poznámka k došlým řešením: V řadě řešení se objevilo tvrzení, že voda se nevyskytuje po molekulách, ale po jakýchsi kapičkách, které jsou mnohem větší než molekuly vzduchu a tudíž neprojdou otvory, kterými molekuly vzduchu projít mohou. Toto tvrzení je zjevně mylné, protože jednak se voda (ve vzduchu) běžně vyskytuje po molekulách a v této podobě může látkou bez problémů projít (to je mimochodem běžný způsob využití těchto látek — voda ve formě vodní páry projde, ale kapalná voda nikoli). Navíc tvrdit, že kapičky vody neprojdou otvory kvůli své velikosti, je jako tvrdit, že voda, která se nachází v bazénu ve formě kvádrů s hranami dlouhými několik metrů, nemůže vytéct otvorem o průměru 10 cm — (pokud neuvedeme nějaké další důvody, proč nemůže voda otvorem projít).