

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

5. ročník — 1998/1999

Vzorová řešení 3. série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č.1 (4 body)

Vrzání dveří

Chceme-li pochopit, proč některé dveře při otevírání vrzají a některé ne, musíme si blíže všimnout sil, které se při jejich otevírání uplatňují. Především si musíme uvědomit, že dveře nejsou s panty spojeny absolutně pevně a že se při pohybu pružně deformují. Dále je důležité, že v pantech působí třecí síly. Zatlačíme-li tedy na dveře, ty se pootočí, panty však vlivem tření zůstávají ještě chvíli v klidu. Tlačíme-li totiž na dveře, zvyšuje se velikost momentu sil pružnosti, jimiž působí dveře na pohyblivou část pantu, a současně se zvyšuje i velikost momentu třecích sil, jimiž pohyblivá část pantu působí na jeho pevnou část. To se děje tak dlouho, dokud velikost obou momentů nedosáhne maximální možné hodnoty odpovídající hodnotě statického koeficientu tření. Při dalším zvýšení tlaku na dveře se tedy dveře pohnou. Pohybové tření je ovšem menší než tření klidové, takže se moment třecích sil najednou skokem zmenší. Moment sil pružnosti je tedy nyní větší než moment třecích sil. Panty jsou výsledným momentem urychleny, takže „předhoní“ dveře. Zároveň se však moment sil pružnosti opět zmenšuje, až se po čase zmenší natolik, že opět převládne moment třecích sil, který panty zastaví. Výše uvedený děj – pant je chvíli v pohybu, pak poskočí – se stále opakuje, dokud se dveře úplně nezastaví. Toto opakování je však vzhledem k poměrně pevné vazbě pantů s dveřmi velmi rychlé, a proto pro naše oči prakticky nepostřehnutelné. „Poskakování“ pantů se pak přenáší na okolní vzduch a vzniká známý vrzavý zvuk, který slyšíme. Jeho frekvence odpovídá frekvenci poskakování pantů. Vrzání dveří je tedy způsobeno především rozdílem mezi klidovým a pohybovým třením pantů. Pokud by ovšem oba druhy tření byly stejné, nedošlo by k zastavení pantů,

takže ty by nemohly dveře předhonit a naopak by zůstávaly za dveřmi pozadu. Takového stavu lze také docílit velmi rychlým otevíráním dveří, jehož výsledkem je pak to, že otevírání přejde v plynulý pohyb a vrzání se vůbec neozve. Dveře tedy přestanou vrzat proto, protože panty přeskakovat nestíhají. Naproti tomu při pomalém otevírání panty poskakují a my slyšíme nepříjemné vrzání. Chceme-li tedy tiše vstoupit do místnosti s vrzajícími dveřmi, musíme otevírat dveře co nejrychleji. Na začátku a na konci, kdy mají dveře malou úhlovou rychlost, se sice ozvou dvě krátká vrznutí, ale mezi nimi bude ticho.

Poznámka k řešení: Správnou podstatu vrzání dveří pochopilo jen málo řešitelů. Skoro všichni však správně odpověděli, že je lépe otevírat vrzající dveře rychle. Proč je však otevírat rychleji, vysvětlili správně jen ti, kteří pochopili podstatu vrzání dveří. Někteří se mylně domnívali, že dveře přestanou vrzat, protože kmitají na ultrazvukových kmitočtech. S frekvencí více než několik tisíc hertzů by panty prostě nemohly. Někteří se také domnívali, že při pomalém otevírání by dveře nevrzaly, protože by se zvuk dostal do oblasti infrazvuku.

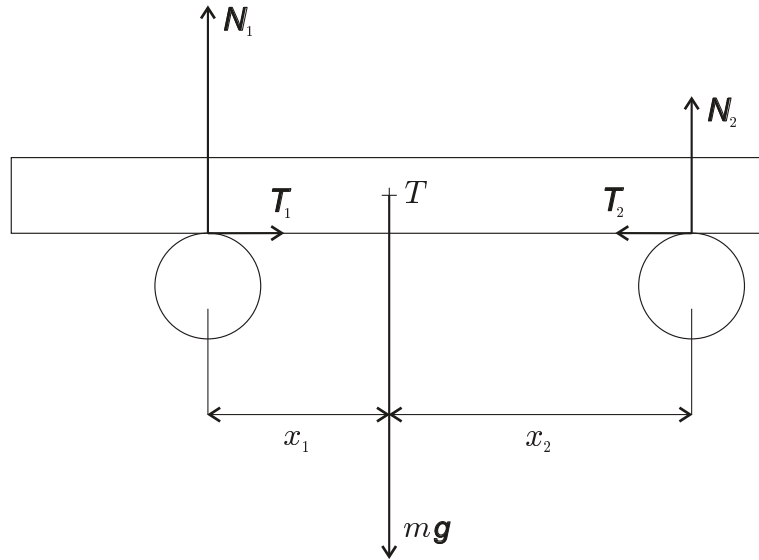
Vzorové řešení úlohy č.2 (6 bodů)

Pravítko

V průběhu experimentu pozorujeme střídavě vzájemný pohyb pravítka a prvního ukazováčku, přičemž druhý ukazováček je vůči pravítku v klidu, a pravítka a druhého ukazováčku, přičemž první ukazováček se vůči pravítku nepohybuje. Oba prsty se postupně (střídavě) přibližují k těžišti pravítka, kde se setkají.

Při dostatečně malé vzájemné rychlosti prstů a pravítka můžeme považovat hybnost pravítka za zanedbatelnou a změny jeho pohybu za okamžité. V důsledku toho můžeme v dalších úvahách předpokládat, že v každém okamžiku platí podmínky statické rovnováhy.

Na začátku experimentu podpírá každý ukazováček jeden konec pravítka. Vzájemnému pohybu mezi pravítkem a ukazováčky brání klidová třecí síla T^K . Vlivem náhodných jevů překoná jeden ukazováček klidovou třecí sílu dříve. Pravítko se vůči tomuto prstu začne pohybovat, přičemž proti pohybu bude působit smyková třecí síla T^S . Pro velikosti třecích sil T^K a T^S platí $T^K > T^S$. Druhý ukazováček by musel překonat větší třecí sílu T^K , proto se zatím vůči pravítku nepohybuje. S pohybem pravítka se mění rozložení tlakových sil, kterými pravítko působí na oba prsty. Těžiště pravítka se přibližuje k prvnímu ukazováčku, a proto tlaková síla, kterou pravítko působí na první ukazováček, roste na úkor tlakové síly působící na druhý ukazováček. Úměrně změnám tlakových sil se mění i síly tření mezi prsty a pravítkem. V jistém okamžiku dosáhne velikost T^S u prvního ukazováčku velikosti T^K u druhého ukazováčku. V tomto okamžiku se začne pravítko vůči druhému ukazováčku pohybovat. Příslušná třecí síla T^S bude menší než u prvního ukazováčku, protože vzdálenost druhého prstu od těžiště pravítka bude větší. Proto se pohyb pravítka vůči prvnímu ukazováčku zastaví. Ukazováčky si tedy vyměnily role. Popsaný děj se opakuje, pozorujeme střídavý pohyb pravítka vůči prvnímu a druhému prstu.



obr. 1

Označme x_1, x_2 vzdálenosti ukazováčků od těžiště pravítka (viz obr. 1). Ukazováčky působí na pravítko tlakovými silami $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$. Třecí síly působící na pravítko označme $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$. Platí podmínky silové a momentové rovnováhy

$$N_1 + N_2 = mg, \quad N_1 x_1 = N_2 x_2, \quad (1)$$

kde mg je velikost tíhové síly pravítka. Z podmínek (1) určíme velikosti sil $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$

$$N_1 = mg \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad N_2 = mg \frac{x_1}{x_1 + x_2}. \quad (2)$$

Na začátku experimentu je druhý ukazováček v bodě $x_2 = L/2$ a je vůči pravítku v klidu. První ukazováček se pohybuje. V bodě obratu $x_1^{(1)}$, kde se první ukazováček zastaví, platí pro velikosti třecích sil

$$T_1^S = T_2^K \implies f N_1 = f_0 N_2. \quad (3)$$

Po dosazení ze vztahů (2) dostáváme z podmínky (3) první bod obratu

$$x_1^{(1)} = \frac{L}{2} \frac{f}{f_0}. \quad (4)$$

Nyní se pohybuje druhý ukazováček, zatímco první ukazováček je v klidu v bodě $x_1 = x_1^{(1)}$. Analogicky předchozímu případu určíme bod obratu $x_2^{(1)}$. V podmínkách (3) zaměníme indexy 1 a 2, za x_1 ve (2) dosadíme $x_1^{(1)}$ a po úpravě dostáváme

$$x_2^{(1)} = \frac{L}{2} \left(\frac{f}{f_0} \right)^2. \quad (5)$$

Induktivním postupem získáváme ze vztahů (4) a (5) výrazy pro n -té body obratu

$$x_1^{(n)} = \frac{L}{2} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{2n-1}, \quad x_2^{(n)} = \frac{L}{2} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{2n}. \quad (6)$$

Vzorové řešení úlohy č.3 (8 bodů)

Brzděná nabitá částice v magnetickém poli

Výsledná síla působící na částici v magnetickém poli je součtem odporové a Lorentzovy síly

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{odp}} + \mathbf{F}_{\text{mag}}. \quad (1)$$

Dosazením do pohybové rovnice částice a vyjádřením sil v závislosti na rychlosti částice dostáváme pro zrychlení částice

$$\mathbf{a} = -\frac{k}{m} \mathbf{v} + \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

Pro velmi krátký časový interval Δt (přesněji pro interval, jehož délka se blíží k nule) můžeme přibližně psát $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{a} \Delta t$, tedy

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_{\text{odp}} + \Delta \mathbf{v}_{\text{mag}} = \left(-\frac{k}{m} \mathbf{v} + \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \Delta t, \quad (3)$$

viz obrázek 2. Ukažme, že rychlost částice v libovolném okamžiku je kolmá k vektoru magnetické indukce. Počáteční rychlost $\mathbf{v}(0)$ částice, tj. její rychlost v čase $t = 0$, je k vektoru $\mathbf{B}$ kolmá, jak plyne ze zadání úlohy. Podle vztahu (3) platí pro rychlost částice v okamžiku Δt

$$\mathbf{v}(\Delta t) = \mathbf{v}(0) + \left(-\frac{k}{m} \mathbf{v}(0) + \frac{q}{m} \mathbf{v}(0) \times \mathbf{B} \right) \Delta t = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}(0) \Delta t. \quad (4)$$

Vektor zrychlení $\mathbf{a}(0)$ je kolmý k $\mathbf{B}$, neboť je součtem dvou vektorů kolmých k magnetické indukci $\mathbf{B}$: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{odp}} + \mathbf{a}_{\text{mag}}$. Vektor $\mathbf{a}_{\text{odp}}(0) = -\frac{k}{m} \mathbf{v}(0)$ je kolmý k $\mathbf{B}$, neboť $\mathbf{v}(0) \perp \mathbf{B}$, vektor $\mathbf{a}_{\text{mag}}(0) = -\frac{q}{m} \mathbf{v}(0) \times \mathbf{B}$ je kolmý k $\mathbf{B}$, neboť vektorový součin $\mathbf{v}(0) \times \mathbf{B}$ je kolmý k $\mathbf{B}$. Tato úvaha platí nejen v okamžiku $t = 0$, ale i v každém dalším okamžiku. Zrychlení i rychlost částice jsou tedy trvale kolmé k vektoru magnetické indukce $\mathbf{B}$.

Vektor posunutí $\Delta \mathbf{r}$ za krátký časový interval Δt můžeme analogicky jako u vektoru změny rychlosti vyjádřit takto:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t. \quad (5)$$

Určeme nyní poměr velikostí vektorů $\Delta \mathbf{r}$ a $\Delta \mathbf{v}$ a ukažme, že je stálý. Velikost vektoru $\Delta \mathbf{r}$ je rovna

$$|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{v}| \Delta t = v \Delta t \quad (6)$$

Velikost vektoru $\Delta \mathbf{v}$ snadno určíme, uvážíme-li, že se skládá ze dvou složek, které jsou na sebe kolmé, viz (3) a také obrázek 2. Dostáváme tak

$$|\Delta \mathbf{v}| = \sqrt{|\Delta \mathbf{v}_{\text{odp}}|^2 + |\Delta \mathbf{v}_{\text{mag}}|^2} = \sqrt{\left| -\frac{k}{m} \mathbf{v} \right|^2 + \left| \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right|^2} \cdot \Delta t = \frac{v}{m} \sqrt{k^2 + (qB)^2} \Delta t \quad (7)$$

a kombinací se vztahem (6) pak získáme i hledaný poměr

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{|\Delta \mathbf{r}|} = \frac{\sqrt{k^2 + (qB)^2}}{m} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \gamma. \quad (8)$$

Vidíme, že tento poměr je konstantní po celou dobu pohybu částice.

Přistupme nyní k určení úhlu φ sevřeného vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{v}$, který vypočteme pomocí vztahu

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \mathbf{v}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{v}|}. \quad (9)$$

Skalární součin $\mathbf{a} \mathbf{v}$ v čitateli snadno určíme, uvážíme-li, že $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{odp}} + \mathbf{a}_{\text{mag}}$ a vypočteme samostatně

$$\mathbf{a}_{\text{odp}} \mathbf{v} = -\frac{k}{m} \mathbf{v} \mathbf{v} = -\frac{k}{m} v^2 \cos 0^\circ = -\frac{k}{m} v^2 \quad (10)$$

a

$$\mathbf{a}_{\text{mag}} \mathbf{v} = \frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v} = \frac{q}{m} |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| v \cos 90^\circ = 0, \quad (11)$$

kde jsme využili kolmosti vektorů $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. S využitím těchto výsledků dostaneme

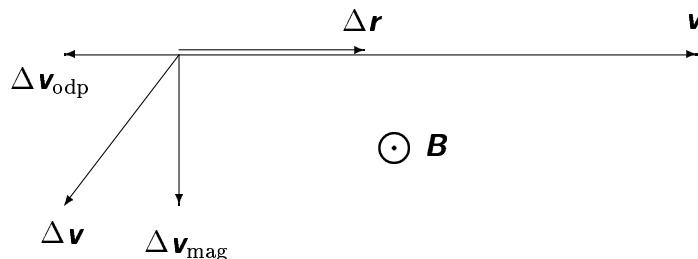
$$\mathbf{a} \mathbf{v} = (\mathbf{a}_{\text{odp}} + \mathbf{a}_{\text{mag}}) \mathbf{v} = \mathbf{a}_{\text{odp}} \mathbf{v} + \mathbf{a}_{\text{mag}} \mathbf{v} = -\frac{k}{m} v^2. \quad (12)$$

Velikost vektoru $\mathbf{a}$ snadno určíme, uvědomíme-li si, že platí $\mathbf{a} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$, přičemž $|\Delta \mathbf{v}|$ je dáno vztahem (7). Pro úhel φ tak můžeme psát

$$\cos \varphi = \frac{\frac{k}{m} v^2}{\frac{v^2}{m} \sqrt{k^2 + (qB)^2}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + (qB)^2}}. \quad (13)$$

Vidíme, že i úhel sevřený vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{v}$ zůstává po celou dobu pohybu konstantní. Totéž je možné říci i o vektorech $\Delta \mathbf{v}$ a $\Delta \mathbf{r}$, které jsou jim úměrné.

Ukázali jsme, že se poměr velikostí i úhel sevřený vektory $\Delta \mathbf{v}$ a $\Delta \mathbf{r}$ během pohybu nemění. Tento výsledek však platí pouze pro změny za časové úseky Δt , jejichž velikost se



obr. 2

blíží k nule, a nelze z něj proto nic přímo usoudit o celkové změně rychlosti a o celkovém posunutí. Posledně jmenované veličiny jsou součtem velkého počtu malých změn za velmi krátké intervaly Δt během celého pohybu. K tomu, abychom výsledek získaný pro $\Delta \mathbf{v}$ a $\Delta \mathbf{r}$ mohli zobecnit na změnu rychlosti a posunutí během celého pohybu, je tedy třeba ukázat, že platí i pro dvojici vektorů, jež je součtem dvou dvojic vektorů mající uvedenou vlastnost.

Ukažme, že svírají-li vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{r}_1$ úhel φ a poměr jejich velikostí je γ a platí-li totéž pro vektory $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{r}_2$ ležící v téže rovině, pak také vektory $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ a $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ svírají úhel φ a poměr jejich velikostí je γ . K tomu stačí uvážit podobnost trojúhelníků tvořených vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}$ a vektory $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ a $\mathbf{r}$ s poměrem podobnosti γ (viz obr. 3), z níž okamžitě plyne

$$\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{r}|} = \frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{|\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{r}_2|} = \gamma. \quad (14)$$

Z rovnosti odpovídajících úhlů podobných trojúhelníků pak plyne, že i úhel mezi vektory $\mathbf{v}$ a $\mathbf{r}$ je stejný jako mezi $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{r}_1$, resp. $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{r}_2$, a je tedy roven φ .

Nyní již víme, že i celková změna rychlosti a celkové posunutí splňují vztahy (8) a (13); zbývá tedy tento výsledek aplikovat na zadané údaje. Uvažme, že celková změna rychlosti bude vždy rovna záporně vzaté počáteční rychlosti $\mathbf{v}_0$, jejich velikosti se proto budou rovnat; celkové posunutí pak bude rovno doletu.

Pro případ částice pohybující se v odporujícím prostředí bez přítomnosti magnetického pole tak lze po dosazení $|\Delta \mathbf{v}| = v_0$, $|\Delta \mathbf{r}| = d$, $B = 0$ do (8) psát

$$\frac{v_0}{d} = \frac{k}{m}. \quad (15)$$

Obdobně pro částici pohybující se v homogenním magnetickém poli o indukci $\mathbf{B}$ platí

$$\frac{v_0}{d_B} = \frac{\sqrt{(qB)^2 + k^2}}{m}, \quad (16)$$

pro pohyb v magnetickém poli o dvojnásobné velikosti pak

$$\frac{v_0}{d_{2B}} = \frac{\sqrt{(2qB)^2 + k^2}}{m}. \quad (17)$$

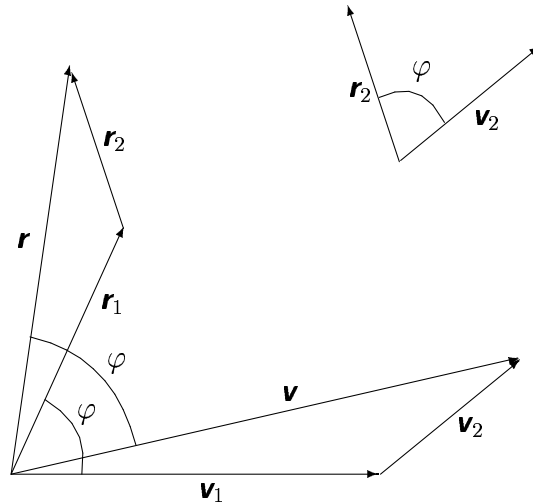
Ze vztahů (15), (16) a (17) snadno vyloučíme neznámé veličiny k , q , m a B a získáme hledaný dolet pro případ dvojnásobného magnetického pole

$$d_{2B} = \frac{d}{\sqrt{4\left(\frac{d}{d_B}\right)^2 - 3}} = 1,76 \text{ m} \quad (18)$$

Poznámka k vektorovému součinu: Vektorovým součinem dvou vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ (v tomto pořadí) se nazývá vektor označovaný $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jehož velikost je dána vztahem

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha,$$

kde a , b jsou velikosti obou vektorů a α úhel jimi sevřený. Jeho směr je přitom kolmý k rovině určené vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Pro určení jeho orientace je možné použít tzv. pravidlo



obr. 3

pravé ruky: směřují-li prsty pravé ruky od prvního vektoru k druhému, potom její odtažený palec ukazuje ve směru jejich součinu.

Vzorové řešení úlohy č.4 (7 bodů)

Problém opatrného motoristy

Při řešení této úlohy je výhodnější užít inerciální vztažnou soustavu spojenou na počátku pohybu, tedy v čase $t = 0$, s automobilem namísto se zemí. V takovém případě se automobil nachází na počátku v klidu, zatímco bod B se pohybuje proti němu rychlostí v ve vzdálenosti x . Pokud se chce řidič dostat co nejdříve do bodu B , musí se rozjet s daným zrychlením a přímo k místu jejich setkání v bodě $B(t)$. Tento bod představuje průsečík kružnice tvořené množinou všech bodů, kam lze za daných podmínek dojet za čas t a opsané z bodu A s polopřímku odpovídající trajektorii bodu B s počátkem v bodě $B(0)$. Za čas t automobil urazí vzdálenost $s = \frac{1}{2}at^2$. Z obrázku je zřejmé, že pro vzdálenost b bodu $B(t)$ od bodu A platí $b = \sqrt{x^2 + (vt)^2}$. Nejkratší čas, za který řidič dojede do bodu B dostaneme srovnáním $s = b$, tedy

$$\frac{1}{2}at^2 = \sqrt{x^2 + (vt)^2}.$$

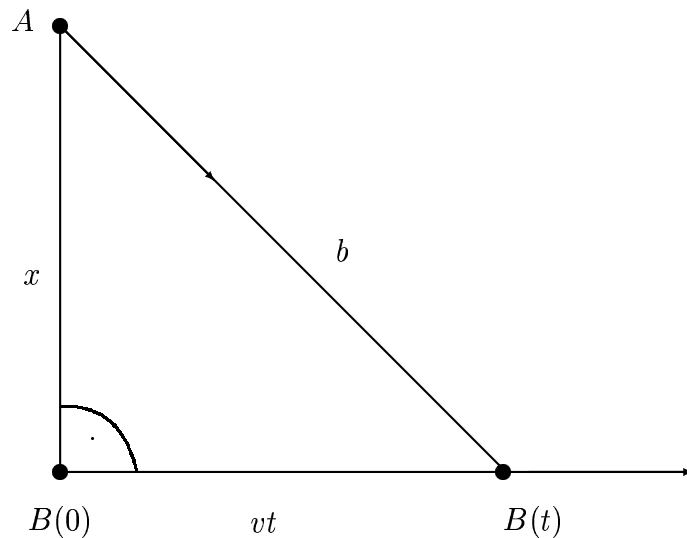
Úpravou dospějeme ke kvadratické rovnici

$$\left(\frac{1}{2}at^2\right)^2 - (vt)^2 - x^2 = 0,$$

mající čtyři kořeny. Pouze jeden ze dvou reálných kořenů

$$t = \sqrt{\frac{v^2 + \sqrt{v^4 + a^2x^2}}{\frac{a^2}{2}}}$$

je řešením této úlohy. Po dosazení za $a = 0,6 \text{ m/s}^2$, $x = 400 \text{ m}$, $v = 30 \text{ km/s}$ dostaneme nejkratší možný čas $t \doteq 42,1 \text{ s}$.



obr. 4

Poznámka: V praxi by řidič těžko přesně odhadl polohu bodu $B(t)$ a musel by v průběhu jízdy korigovat směr, čímž by se prodloužila dráha i čas jízdy.

Pokud by se chtěl řidič dostat do bodu C , princip výpočtu zůstane stejný. Jen vzdálenost c mezi body A a $C(t)$ je větší a platí, že $c = \sqrt{x^2 + (vt + y)^2}$. Srovnáním $s = c$ dojdeme k rovnici čtvrtého stupně

$$\left(\frac{1}{2}at^2\right)^2 = x^2 + (vt + y)^2,$$

jejíž přesné řešení je poměrně obtížné. Pokud využijeme numerického řešení, pak pro výsledný čas dostaneme $t \doteq 47,5 \text{ s}$.

Vzorové řešení úlohy č.5 – prémiová

Tři válce

Abychom mohli položit válce na sebe, aniž by se rozjely, musí být splněny dvě podmínky. První podmínkou je, aby výslednice sil působící na válce byla rovna nule. Druhá podmínka vychází z požadavku momentové rovnováhy (tzv. momentová věta), který říká, že výsledný moment sil působících na válce musí být taktéž roven nule.

Pro horní válec platí $\mathbf{H}' + \mathbf{H}'' + \mathbf{G} = \mathbf{0}$, což odpovídá podmínce silové rovnováhy. Po rozepsání do složek dostáváme $H'_x = -H''_x$ a $H'_z + H''_z = G$. Protože však platí $H'_z = H''_z$, pak $H'_z = G/2$.

Tento problém je symetrický, proto stačí počítat řešení jen pro jeden ze spodních válců, pro který platí opět podmínka $\mathbf{P} + \mathbf{G} + \mathbf{H} = \mathbf{0}$ a navíc podmínka vycházející z momentové

věty $\mathbf{r}_p \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_h \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Vektory $\mathbf{r}_h$ a $\mathbf{r}_p$ mají souřadnice

$$\mathbf{r}_h = \left(\frac{-R}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}R \right)$$

$$\mathbf{r}_p = (0; -R),$$

což je ostatně vidět z obrázku.

Oba spodní válce budou na sebe silově působit, pouze pokud se budou pod vlivem tíhy vrchního válce deformovat. Protože ale uvažujeme dokonale tuhé válce, je síla $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Po dosazení do rovnice pro síly dostáváme

$$H_x = -P_x \quad (1)$$

$$H_z + P_z = G,$$

ale protože je $H_z = -H'_z = -G/2$, pak nám vychází $P_z = \frac{3}{2}G$.

Rozepsáním rovnice pro moment sil obdržíme rovnici ve tvaru

$$P_x R - \frac{H_z}{2} R - \frac{H_x}{2} \sqrt{3} R = 0,$$

kde po dosazení za P_x ze vztahu (1) dostáváme

$$H_x = -P_x = \frac{H_z}{2\sqrt{3}} = \frac{G}{4 + 2\sqrt{3}} = G\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right).$$

Rovnováha se udrží, pokud platí

$$|\mathbf{P}_t| \leq f_P |\mathbf{P}_n|$$

a

$$|\mathbf{H}_t| \leq f_V |\mathbf{H}_n|$$

Protože je $P_t = P_x$, $P_n = P_z$, $H_n = \frac{H_x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}H_z$ a $H_t = -\frac{\sqrt{3}}{2}H_x - \frac{H_z}{2}$ dostáváme po dosazení pro f_P

$$\frac{3}{2}Gf_P \geq G\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right),$$

tedy

$$f_P \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{3} \approx 0,089.$$

Dosazením do vztahů pro H_n a H_t dostáváme

$$H_t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2 - \sqrt{3}}{2} G + \frac{G}{4} = G\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

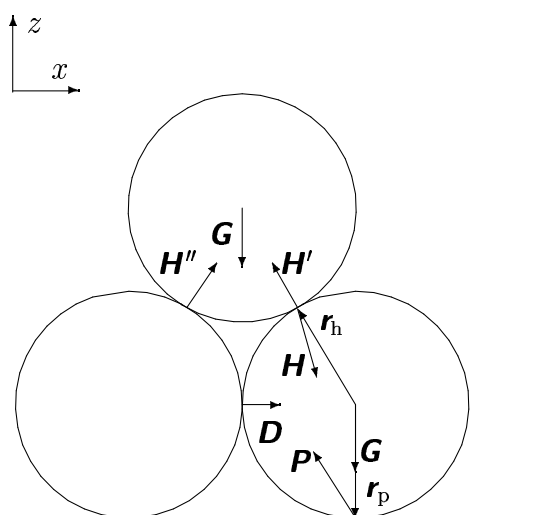
$$H_n = \frac{G}{2} \frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} G = \frac{G}{2}$$

a po dosazení získáme vztah pro f_V

$$\frac{G}{2}f_V \geq \frac{2 - \sqrt{3}}{2} G,$$

tedy

$$f_V \geq 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$$



obr. 5