

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

6. ročník — 1999/2000

Vzorová řešení 1. série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č.1 (5 bodů)

Ve výtahu

- I. (a) Na nádobu s vodou působí Země tíhovou silou $\vec{F}_G$ a váha kolmou tlakovou silou $\vec{N}$. Výčet reálných sil nezávisí na typu pohybu výtahu ani na volbě vztažné soustavy.

- (b) Řešení v inerciální vztažné soustavě spojené s pozorovatelem na schodišti:¹

Vyjdeme z druhého Newtonova zákona pro nádobu

$$M\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N}.$$

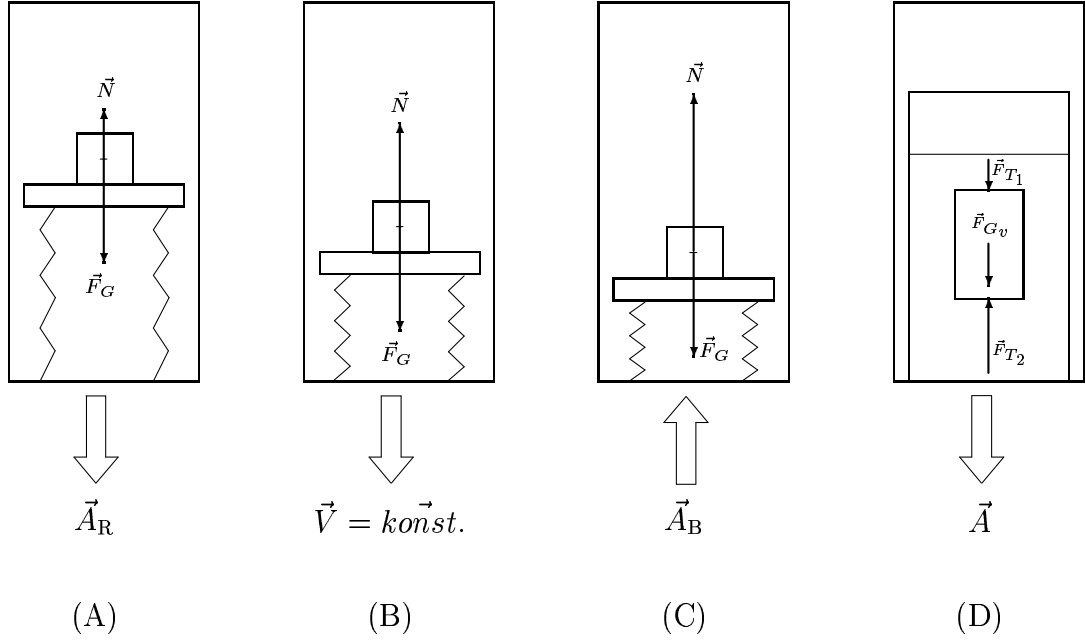
Protože se nádoba pohybuje vzhledem ke schodišti se stejným zrychlením jako výtah, dosadíme postupně $\vec{a} = \vec{A}_R$, $\vec{a} = \vec{0}$ a $\vec{a} = \vec{A}_B$ a s přihlédnutím ke směru jednotlivých vektorů (viz obr. 1A až 1C) dostaneme

$$\begin{array}{rcll} MA_R & = & F_G - N & \\ 0 & = & F_G - N & \Rightarrow \\ -MA_B & = & F_G - N & \end{array} \quad \begin{array}{l} N = M(g - A_R), \\ N = Mg \\ N = M(g + A_B). \end{array}$$

Podle třetího Newtonova zákona působí váha na nádobu stejně velikou, ale opačně orientovanou silou jako nádoba na váhu. Na stupnici váhy tedy čteme údaj $M' = \frac{N}{g}$, v jednotlivých etapách pohybu výtahu konkrétně

¹Dále jen „soustava $\mathcal{S}$ “.

$$\begin{aligned}
M' &= M \left(1 - \frac{A_R}{g} \right) < M, \\
M' &= M, \\
M' &= M \left(1 + \frac{A_B}{g} \right) > M.
\end{aligned}$$



Obr. 1

Řešení v neinerciální vztažné soustavě spojené s experimentátorem ve výtahu:²

Opět vycházíme z druhého Newtonova zákona pro nádobu. Jeho platnost rozšíříme na uvažovanou neinerciální vztažnou soustavu formálním zavedením dodatečného členu, tzv. setrvačné síly $\vec{F}^* = -M\vec{A}$, kde $\vec{A}$ představuje zrychlení výtahu, tj.

$$M\vec{a}' = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}^*.$$

Dosadíme-li $\vec{a}' = \vec{0}$ (nádobu se vzhledem k výtahu nepohybuje) a postupně $\vec{F}^* = -M\vec{A}_R$, $\vec{F}^* = \vec{0}$ (rovnoměrně jedoucí výtah je inerciální soustavou) a $\vec{F}^* = -M\vec{A}_B$, získáme pro jednotlivé etapy pohybu výtahu stejné rovnice a tím podle očekávání i stejné výsledky jako při řešení v soustavě $\mathcal{S}$.

(c) Řešení v soustavě $\mathcal{S}$:

Uvažujme libovolně umístěný kapalinový váleček výšky h s podstavou o ploše S kolmou na směr tíhového zrychlení (viz obr. 1D). V těžišti válečku působí tíhová

²Dále jen „soustava $\mathcal{S}'$ “.

síla $\vec{F}_{G_v}$, na horní (resp. dolní) podstavu svíslá tlaková síla $\vec{F}_{T_1}$ (resp. $\vec{F}_{T_2}$) a na plášť vodorovná tlaková síla $\vec{F}_{T_3}$, která je součtem elementárních tlakových sil působících kolmo ze všech stran. Z druhého Newtonova zákona

$$m\vec{a} = \vec{F}_{G_v} + \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2} + \vec{F}_{T_3}$$

je vzhledem ke svíslému směru vektorů $\vec{a}$, $\vec{F}_{G_v}$, $\vec{F}_{T_1}$ a $\vec{F}_{T_2}$ zřejmé, že platí $\vec{F}_{T_3} = \vec{0}$. Místa o stejném tlaku tedy leží ve vodorovných rovinách, tj. rovinách kolmých na směr tíhového zrychlení.

Splývá-li speciálně horní podstava válečku s volnou hladinou, je $F_{T_1} = p_a S$, resp. $F_{T_2} = p_h S$, kde p_a označuje atmosférický tlak a p_h tlak v hloubce h pod hladinou. Dosadíme-li dále $m = \rho S h$ (ρ je hustota kapaliny) a postupně $\vec{a} = \vec{A}_R$, $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} = -\vec{A}_B$ (váleček se pohybuje se stejným zrychlením jako výtah), získáme s uvážením směru jednotlivých vektorů

$$\begin{aligned} p_h &= p_a + h\rho(g - A_R), \\ p_h &= p_a + h\rho g, \\ p_h &= p_a + h\rho(g + A_B). \end{aligned}$$

Řešení v soustavě $\mathcal{S}'$:

Postupujeme analogicky jako v $\mathcal{S}$, v druhém Newtonově zákonu však nyní navíc figuruje setrvačná síla $\vec{F}^* = -m\vec{A}$, tj.

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{G_v} + \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2} + \vec{F}_{T_3} + \vec{F}^*.$$

Po dosazení $\vec{a}' = \vec{0}$ (váleček se vzhledem k výtahu nepohybuje) a postupně $\vec{A} = \vec{A}_R$, $\vec{A} = \vec{0}$, $\vec{A} = \vec{A}_B$ získáme v souladu s očekáváním stejné výsledky jako při řešení v $\mathcal{S}$.

(d) Řešení v soustavě $\mathcal{S}$:

Volně puštěný předmět se vzhledem k soustavě $\mathcal{S}$ pohybuje se zrychlením $\vec{g}$, zrychlení výtahu bylo již dříve obecně označeno $\vec{A}$. Velikost rychlosti výtahu v okamžiku uvolnění předmětu nechť je V_0 , velikost rychlosti předmětu (resp. výtahu) v okamžiku dopadu t_d předmětu označíme v_p (resp. V_v). Platí

$$\begin{aligned} v_p &= V_0 + gt_d, \\ V_v &= V_0 + At_d, \end{aligned}$$

odtud vyjádříme rychlost dopadu předmětu vzhledem k výtahu $v_d = v_p - V_v = (g - A)t_d$. Dobu pádu t_d určíme ze vztahů pro dráhu s_p předmětu a s_v výtahu

$$\begin{aligned} s_p &= V_0 t + \frac{1}{2} g t_d^2 \\ s_v &= V_0 t + \frac{1}{2} A t_d^2 \\ s_p &= s_v + H \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad t_d = \sqrt{\frac{2H}{(g-A)}}$$

Obecně tedy vychází

$$v_d = \sqrt{2(g - A)H},$$

pro jednotlivé etapy pohybu výtahu pak po dosazení $A = A_R$, $A = 0$ a $A = -A_B$

$$\begin{aligned}v_d &= \sqrt{2(g - A_R)H}, \\v_d &= \sqrt{2gH}, \\v_d &= \sqrt{2(g + A_B)H}.\end{aligned}$$

Řešení v soustavě $\mathcal{S}'$:

Pro rychlost dopadu předmětu na podlahu a dráhu, kterou předmět urazí, platí

$$\begin{aligned}v &= a'_p t_d, \\H &= \frac{1}{2} a'_p t_d^2.\end{aligned}$$

Odtud $v_d = \sqrt{2a'_p H}$, kde $a'_p = g - A$ je zrychlení předmětu vzhledem k výtahu, tj. $v_d = \sqrt{2(g - A)H}$, což je očekávaný výsledek.

- II. Beztížnému stavu odpovídá situace, kdy výtah padá volným pádem. Dosazením $A_R = g$ do předchozích výsledků dostáváme
- (b) $M' = 0$,
 - (c) $p_h = p_a$,
 - (d) $t_d \rightarrow \infty$ a $v_d = 0$.

Vzorové řešení úlohy č.2 (8 bodů)

Ve vlaku

(α) TŘENÍ MEZI MEZI KANYSTREM A PODLAHOU JE ZANEDBATELNÉ

(a) Na kanystr působí Země tíhovou silou $\vec{F}_G$ a podlaha kolmou tlakovou silou $\vec{N}$.

(b) Řešení v inerciální vztažné soustavě spojené s pozorovatelem na nástupišti:³

Druhý Newtonův zákon popisující pohyb kanystru o hmotnosti M má tvar

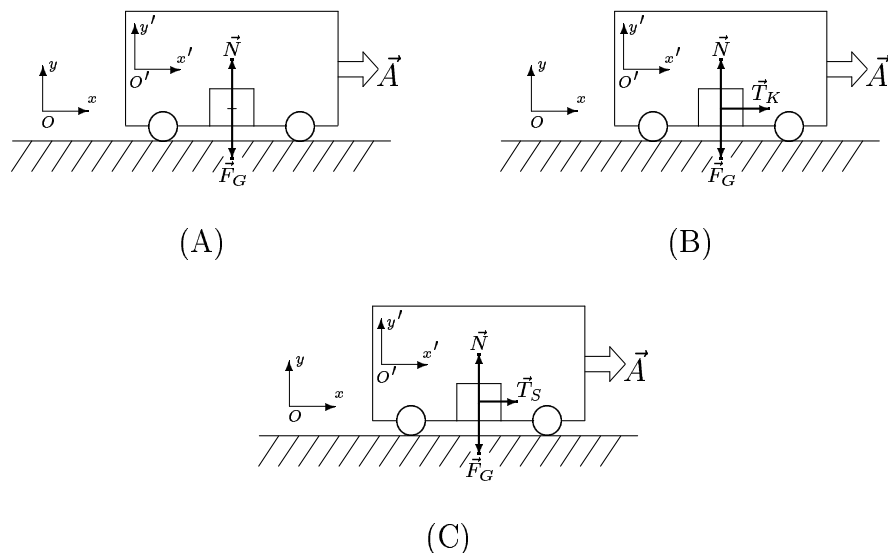
$$M\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N},$$

resp. v soustavě souřadnic podle obr. 2A

$$\begin{aligned}Ma_x &= 0, \\Ma_y &= N - F_G.\end{aligned}$$

Kanystr se ve směru osy y nepohybuje (tzv. vazební podmínka), tj. $a_y = 0$, a podle první rovnice rovněž $a_x = 0$: kanystr tedy zůstává vzhledem k nástupišti v klidu až do okamžiku kontaktu s příjíždějící zadní stěnou vagónu.

³Dále jen „soustava $\mathcal{S}$ “.



Obr. 2

Řešení v neinerciální vztažné soustavě spojené s cestujícím ve vlaku:⁴

Druhý Newtonův zákon „opravený“ na neinerciálnost vztažné soustavy spojené s vlakem je

$$M\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}^*,$$

kde pro setrvačnou sílu platí $\vec{F}^* = -M\vec{A}$, resp. v soustavě souřadnic podle obr. 2A

$$\begin{aligned} Ma'_{x'} &= -MA, \\ Ma'_{y'} &= F_G - N. \end{aligned}$$

Z vazební podmínky opět máme $a'_{y'} = 0$ a podle první rovnice $a'_{x'} = -A$: kanystř se vzhledem k vagónu pohybuje rovnoměrně zrychleně v záporném směru osy x' až do okamžiku kontaktu s jeho zadní stěnou.

(c) Řešení v soustavě $\mathcal{S}$:

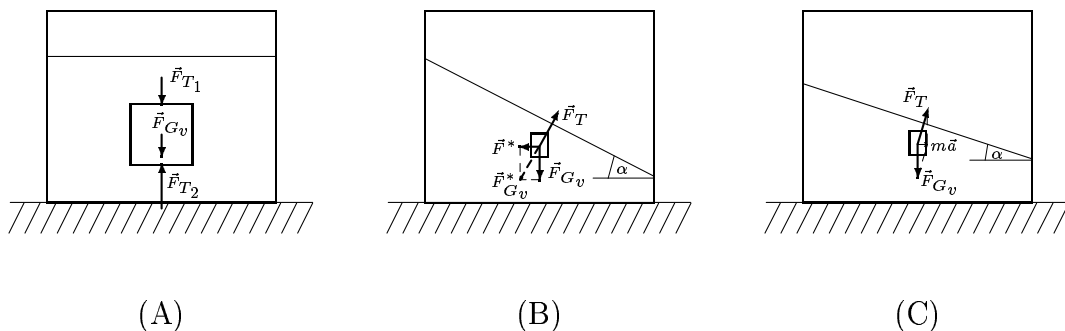
Postupujeme stejně jako v úloze 1.(c) (viz obr. 3A). Z druhého Newtonova zákona pro váleček

$$m\vec{a} = \vec{F}_{G_v} + \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2} + \vec{F}_{T_3},$$

v němž je podle části (b) této úlohy $\vec{a} = \vec{0}$, vyplývá, že platí $\vec{F}_{T_3} = \vec{0}$. Místa o stejném tlaku tedy spojují vodorovné roviny, tj. roviny kolmé na směr tíhového zrychlení. Po rozepsání a úpravě získáme pro tlak v hloubce h pod hladinou vztah

$$p_h = p_a + h\rho g.$$

⁴Dále jen „soustava $\mathcal{S}'$ “.



Obr. 3

(β) SOUČINITEL KLIDOVÉHO TŘENÍ f_0 MEZI KANYSTREM A PODLAHOU NABÝVÁ TAKOVÉ HODNOTY, ŽE KANYSTR JE VZHLEDEM K VAGÓNU V KLIDU

- (a) Na kanystr působí Země tíhovou silou $\vec{F}_G$, podlaha pak kolmou tlakovou silou $\vec{N}$ a vodorovnou silou klidového tření $\vec{T}_K$.
- (b) Řešení v soustavě $\mathcal{S}$:

Druhý Newtonův zákon má nyní tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{T}_K,$$

resp. (viz obr. 2B)

$$\begin{aligned} Ma_x &= T_K, \\ Ma_y &= F_G - N. \end{aligned}$$

Podle zadání je $a_x = A$, tj. $T_K = MA \leq Nf_0$. Vazební podmínka $a_y = 0$ vede ke vztahu $N = F_G$, celkem tedy $f_0 \geq \frac{A}{g}$.

Řešení v soustavě $\mathcal{S}'$:

Druhý Newtonův zákon „opravený“ na neinerciálnost vztažné soustavy je

$$M\vec{a}' = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{T}_K + \vec{F}^*,$$

resp. (viz obr. 2B)

$$\begin{aligned} Ma'_{x'} &= -MA + T_K, \\ Ma'_{y'} &= F_G - N. \end{aligned}$$

Zadání požaduje $a'_{x'} = 0$, což vede s uvážením vazební podmínky $a'_{y'} = 0$ k očekávanému výsledku $f_0 \geq \frac{A}{g}$.

(c) Řešení v soustavě $\mathcal{S}'$:

Do druhého Newtonova zákona pro váleček musíme kromě tíhové síly $\vec{F}_{G_v}$ a celkové tlakové síly $\vec{F}_T = \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2} + \vec{F}_{T_3}$ zahrnout také sílu setrvačnou $\vec{F}^*$, tj.

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{G_v} + \vec{F}_T + \vec{F}^*,$$

kde podle části (b) $\vec{a}' = \vec{0}$ (viz obr. 3B⁵). Situace je tedy stejná, jako kdyby byl váleček v klidu v „efektivním“ tíhovém poli charakterizovaném vektorem tíhového zrychlení $\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{A}$. Místa o stejném tlaku nyní leží v rovinách kolmých na $\vec{g}^*$, tj. v rovinách, které svírají s vodorovnou rovinou úhel α daný vztahem

$$\tan \alpha = \frac{F^*}{F_{G_v}} = \frac{A}{g}.$$

Pro velikost tlaku v hloubce h pod hladinou platí

$$p_h = p_a + h\rho g^* = p_a + h\rho\sqrt{g^2 + A^2}.$$

(γ) PRO SOUČINITEL KLIDOVÉHO TŘENÍ MEZI KANYSTREM A PODLAHOU PLATÍ
 $f_0 < \frac{A}{g}$, SOUČINITEL SMYKOVÉHO TŘENÍ JE f

(a) Na kanystr působí Země tíhovou silou $\vec{F}_G$, podlaha pak kolmou tlakovou silou $\vec{N}$ a vodorovnou silou smykového tření $\vec{T}_S$.

(b) Řešení v soustavě $\mathcal{S}$:

Druhý Newtonův zákon je

$$M\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{T}_S,$$

resp. (viz obr. 2C)

$$Ma_x = T_S,$$

$$Ma_y = F_G - N.$$

Dosadíme-li do $T_S = Nf$ důsledek vazební podmínky $N = F_G$, dostaneme z první rovnice $a_x = gf$: kanystr se vzhledem k nástupišti pohybuje s konstantním zrychlením v kladném směru osy x . Protože obecně platí $f < f_0$, je $a_x < A$.

Řešení v soustavě $\mathcal{S}'$:

Druhý Newtonův zákon respektující neinerciálnost vztažné soustavy má tvar

$$M\vec{a}' = \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{T}_S + \vec{F}^*,$$

⁵Pro přehlednost jsou opět – stejně jako na většině předchozích obrázků – všechny působící síly zakresleny do těžiště válečku.

kde $\vec{F}^* = -M\vec{A}$, resp. (podle obr. 2C)

$$\begin{aligned} Ma'_{x'} &= -MA + T_S \\ Ma'_{y'} &= F_G - N \end{aligned}$$

Analogickým postupem jako v soustavě $\mathcal{S}$ dostaneme nyní $a'_{x'} = gf - A < 0$: kanystr se vzhledem k vagónu pohybuje s konstantním zrychlením v záporném směru osy x' až do okamžiku kontaktu s jeho zadní stěnou.

(c) Řešení v soustavě $\mathcal{S}$:

Druhý Newtonův zákon pro váleček je

$$m\vec{a} = \vec{F}_{G_v} + \vec{F}_T,$$

v němž podle části (b) $a_x = gf$, $a_y = 0$ (viz obr. 3C). Získáváme stejnou výchozí rovnici a tím i stejné výsledky jako v části (β)(c), místo A však všude píšeme gf .

Vzorové řešení úlohy č.3 (7 bodů)

Na kolotoči poprvé aneb Držte si klobouky!

- (a) Na vozíček působí Země tíhovou silou $\vec{F}_{G_A}$ a kolejnice kolmou tlakovou silou $\vec{N}_A$.

Na kabinku působí rovněž Země tíhovou silou $\vec{F}_{G_B}$ a spojovací tyč silou $\vec{N}_B$, která má charakter buď síly tahové nebo síly tlakové, a je vždy kolmá ke kružnicové trajektorii.

- (b) Řešení v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí:

Pokud má vozíček o hmotnosti M_A projít celou kružnicí, musí mít v nejvyšším bodě alespoň takovou rychlost v_A' , aby tlaková síla kolejnice byla právě nulová. Dostředivé zrychlení a_D pak udílí vozíčku pouze gravitační síla, tj.

$$M_A a_D = M_A \frac{v_A'^2}{R} = F_{G_A} \Rightarrow v_A' = \sqrt{gR}.$$

Odpovídající rychlost vozíčku v nejnižším bodě kružnice spočteme ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}M_A v_A^2 = \frac{1}{2}M_A v_A'^2 + 2M_A gR \Rightarrow v_A = \sqrt{5gR}$$

Pro rychlost kabinky však tento vzorec neplatí. Vzhledem k dvojí možné orientaci síly tyče totiž může být rychlost kabinky v nejvyšším bodě nulová i bez nebezpečí jejího pádu. Dostředivé zrychlení je v tomto případě nulové a podle druhého Newtonova zákona má tíhová síla $\vec{F}_{G_B}$ stejnou velikost, ale opačnou orientaci jako tlaková

síla tyče $\vec{N}_B$. Užitím zákona zachování mechanické energie dostaneme po dosazení $v_B' = 0$ pro minimální rychlost kabinky v nejnižším bodě

$$v_B = \sqrt{4gR} = 2\sqrt{gR} < v_A.$$

Poznámka 1:

Pokud chceme počítat minimální rychlost vozičku (resp. kabinky) v nejvyšším bodě z hlediska neinerciální vztažné soustavy s ním spojené, musíme do druhého Newtonova zákona kromě reálných sil formálně zahrnout také fiktivní sílu setrvačnou odstředivou, pro niž platí $\vec{F}_{SO}^* = -M_A \vec{a}_D$. Pro výpočet odpovídající rychlosti v nejnižším bodě kružnice však musíme přejít do vztažné soustavy spojené se Zemí, vzhledem k níž se vyjadřují rychlosti v zákonu zachování mechanické energie.

Poznámka 2:

V reálné situaci není hmotnost spojovací tyče M_T oproti hmotnosti kabinky M_B zanedbatelná. Kinetická energie tuhé soustavy „tyč – kabinka“ v nejnižším bodě musí být alespoň taková, aby stačila na výstup kabinky i tyče do nejvyšší polohy, skutečná rychlost v_B je proto vyšší než idealizovaná hodnota $2\sqrt{gR}$. K výpočtu v_B užijeme zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = 2Mgd,$$

kde $\omega = \frac{v_B}{R}$ je úhlová rychlost soustavy v nejnižším bodě, M je celková hmotnost soustavy, J její moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení a d vzdálenost těžiště soustavy od osy otáčení. Odtud

$$v_B = 2R\sqrt{\frac{Mgd}{J}}.$$

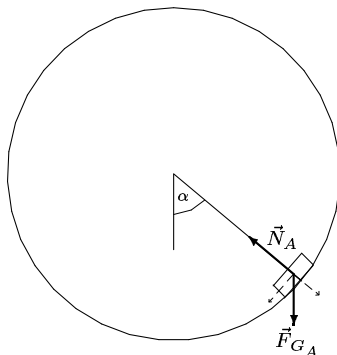
Všimněme si, že má-li tyč oproti kabině zanedbatelnou hmotnost, je $M \doteq M_B$, $J \doteq M_B R^2$ (kabinku považujeme za hmotný bod) a $d \doteq 2R$, což po dosazení do obecného vztahu přivede k dříve odvozenému speciálnímu výsledku $v_B = 2\sqrt{gR}$.

- (c) Tlaková síla kolejnice tvoří spolu s průmětem tíhové síly do směru normály ke kružnici sílu dostředivou, tedy (viz obr. 4)

$$N_A = M_A g \cos \alpha + M_A \frac{v^2}{R},$$

kde v označuje rychlost vozičku v poloze určené úhlem α . Je-li počáteční rychlost v nejnižší poloze menší než v_A , mohou nastat tyto alternativy:

- Voziček periodicky kmitá po části dolní půlkružnice (stále platí $N_A \geq 0$, neboť $v \geq 0$ a současně $\cos \alpha \geq 0$).
- Voziček se pohybuje stále v téže směru vzhůru až do okamžiku, kdy v konkrétním bodě horní půlkružnice vymizí tlaková síla kolejnice (platí $v \geq 0$, $\cos \alpha \leq 0$). V tomto bodě se voziček oddělí od kružnice a dále se pohybuje po trajektorii šikmého vrhu.



Obr. 4

Pokud má kabinka v nejnižší poloze rychlost menší než v_B , pohybuje se vždy kmitavým pohybem, protože tyč jí nedovoluje kružnici opustit.

- (d)
- Pro rychlý průjezd vozičku či kabinky nejvyšším bodem kružnicové trajektorie je dostředivá síla působící na pasažéra realizována výslednicí tíhové síly Země a tlakové síly sedadla. Připoutání zde není nutné.
Při pomalém průchodu kabinky nejvyšším bodem kružnice je dostředivé zrychlení pasažéra malé (krajnímu případu $v_B' = 0$ odpovídá $a_D = 0$) a jeho pádu brání pouze pevné připoutání k sedadlu. Dostředivá síla je tvořena výslednicí tíhové síly a opačně orientované „záchranné“ síly. Pomalý průchod kabinky nejvyšším bodem kružnice snáší normální člověk hůře než průjezd rychlý.
 - Při průjezdu ostrou horizontální zatáčkou je dostředivá síla zpravidla realizována tlakovou silou boční stěny vozičku, připoutání k sedadlu tedy není nutné. Rychlý pohyb zde snáší pasažér hůře než pomalý, protože je vystaven většímu silovému působení z boku.

Vzorové řešení úlohy č.4 (5 bodů)

Na návštěvě v laboratoři

- (a) Popišme nejprve samovolný proces oddělování složek směsí. Na částěčku oddělované látky o hmotnosti m působí svisle dolů tíhová síla $\vec{F}_G$, svisle vzhůru hydrostatická vztlačková síla $\vec{F}_{VZ}$ a proti pohybu částěčky také odporová síla $\vec{F}_{OD}$ (její velikost závisí na tvaru a rozměrech částěčky, na její rychlosti a na vlastnostech okolní kapaliny). Druhý Newtonův zákon má tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_{VZ} + \vec{F}_{OD},$$

částička o hustotě ρ tedy klesá v kapalině o hustotě ρ_K se zrychlením

$$ma = \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho}\right) mg - F_{OD}.$$

Vložme nyní zkumavku se směsí do odstředivky (viz schematický obr. 5, úhel ϑ bývá u laboratorních typů odstředivek fixován). Abychom vyjádřili zrychlení uvažované částičky vzhledem ke zkumavce rotující odstředivky, musíme do druhého Newtonova zákona kromě tíhové síly $\vec{F}_G$, celkové tlakové síly okolní kapaliny $\vec{F}_T$ a odporové síly $\vec{F}_{OD}$ navíc zahrnout i fiktivní sílu setrvačnou odstředivou $\vec{F}_{SO}^*$, tj.

$$m\vec{a}' = \vec{F}_G + \vec{F}_T + \vec{F}_{OD} + \vec{F}_{SO}^*.$$

Vzhledem k tomu, že zrychlení udílené tíhovou silou bývá v praxi zanedbatelné oproti zrychlení setrvačnému, které dosahuje hodnoty několika tisíc až desítek tisíc g , je přímo ⁶

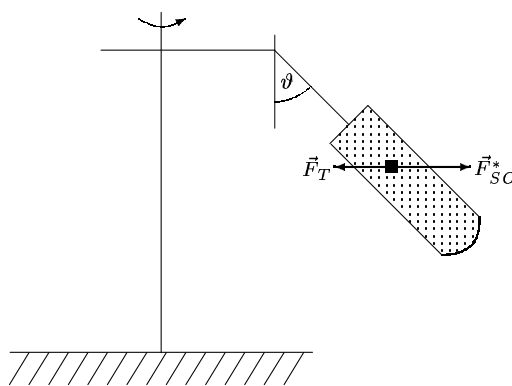
$$m\vec{a}' \doteq \vec{F}_T + \vec{F}_{OD} + \vec{F}_{SO}^*.$$

Stejným postupem jako v úlohách 1. a 2. se ukáže, že celková tlaková síla kapaliny má téměř stejný směr, ale opačnou orientaci než síla setrvačná odstředivá (rozložení tlaku v kapalině určuje pouze setrvačné zrychlení). Částička se tedy pohybuje ve vodorovném směru k vnější stěně zkumavky a po ní dále klouže se zrychlením, pro něž platí

$$ma' = (F_{SO}^* - F_T) \sin \vartheta - F_{OD},$$

odporová síla je nyní rovnoběžná se stěnou zkumavky.

Protože bývá $(F_{SO}^* - F_T) \sin \vartheta \gg F_G - F_{VZ}$, klesá částička oddělované látky ke dnu mnohem rychleji než za normální situace, kdy je zkumavka v klidu.



Obr. 5

⁶Fiktivní Coriolisova síla (viz úloha 5.), jejíž působení bychom měli také uvažovat, je oproti síle setrvačné odstředivé zpravidla rovněž zanedbatelná.

Metoda odstředování se používá např.:

- Ve zdravotnictví, kde se pro konkrétní účely zkoumají jen určité složky biologických materiálů (krev, moč, stolice atd.).
- V potravinářství, kde se odstředováním získávají různé tučné složky mléka.
- V těžkém průmyslu k oddělování kalů.

- (b) Odstředování slouží pouze k výraznému urychlení procesu samovolného oddělování složek směsí. Proto nemá význam aplikovat je u směsí látek o stejné hustotě a u směsí, jejichž složky spolu chemicky reagují.

Vzorové řešení úlohy č.5 - prémiové

Na kolotoči podruhé aneb Kdo dá koš, jede zadarmo...

- (a) Hozený míč se bude pohybovat po trajektorii šikmého vrhu, tedy po parabole. Délka vrhu, která zde musí být rovna vzdálenosti R , je dána vztahem

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g},$$

odtud

$$\sin 2\varphi = \frac{Rg}{v_0^2}. \quad (1)$$

Hráč musí házet pod elevačním úhlem φ určeným vztahem (1) tak, aby průmět vektoru počáteční rychlosti míče do vodorovné roviny ležel na spojnici „hráč – koš“.

Poznámka 1:

- Pro $Rg < v_0^2$ (tj. $\sin 2\varphi < 1$) dostaneme dva různé elevační úhly φ_1, φ_2 , pro něž $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$.
- Pro $Rg = v_0^2$ (tj. $\sin 2\varphi = 1$) dostaneme $\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ$.
- Pro $Rg > v_0^2$ (tj. $\sin 2\varphi > 1$) není úhel φ definován. V tomto případě hráč nemusí mířit vůbec, protože není v jeho silách koš zasáhnout.

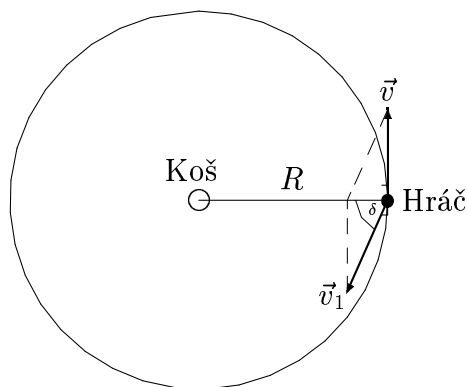
- (b) Správně namířený míč se bude vzhledem k Zemi pohybovat stejně jako v případě, že je kolotoč v klidu (část (a)), vektor počáteční rychlosti tedy svírá s vodorovnou rovinou úhel φ určený vztahem (1). Protože se ovšem hráč nyní pohybuje rychlostí $v = \omega R$ po kružnici, musí mířit tak, aby průmět $v_1 = v_0 \cos \varphi$ počáteční rychlosti míče do vodorovné roviny svíral se spojnici „hráč – koš“ úhel δ daný podle obr. 6 vztahem

$$\sin \delta = \frac{v}{v_1} = \frac{\omega R}{v_0 \cos \varphi}. \quad (2)$$

Poznámka 2:

Má-li být koš zasažen, musí platit $\omega R \leq v_0 \cos \varphi$, s přihlédnutím k (1) celkem

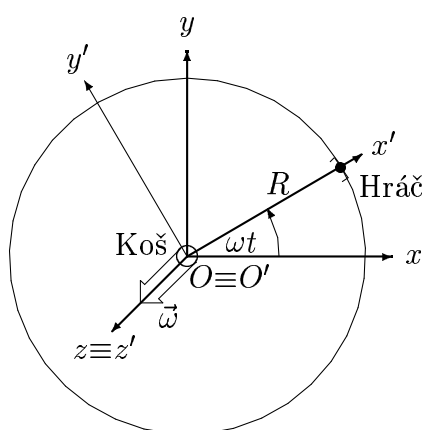
$$v_0 \geq \text{maximum} \left\{ \sqrt{Rg}, \frac{\omega R}{\cos \varphi} \right\}.$$



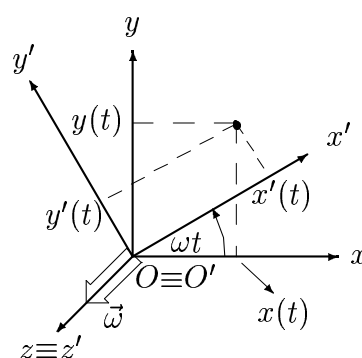
Obr. 6

- (c) Zavedeme-li soustavu souřadnic podle návodu v zadání (viz obr. 7A), jsou transformační vztahy mezi okamžitou polohou míče v čase t $(x(t), y(t), z(t))_{\mathcal{S}}$ v soustavě $\mathcal{S}$ a odpovídající polohou $(x'(t), y'(t), z'(t))_{\mathcal{S}'}$ v soustavě $\mathcal{S}'$ (viz obr. 7B)

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \cos \omega t + y(t) \sin \omega t, \\ y'(t) &= -x(t) \sin \omega t + y(t) \cos \omega t, \\ z'(t) &= z(t). \end{aligned} \quad (3)$$



(A)



(B)

Obr. 7

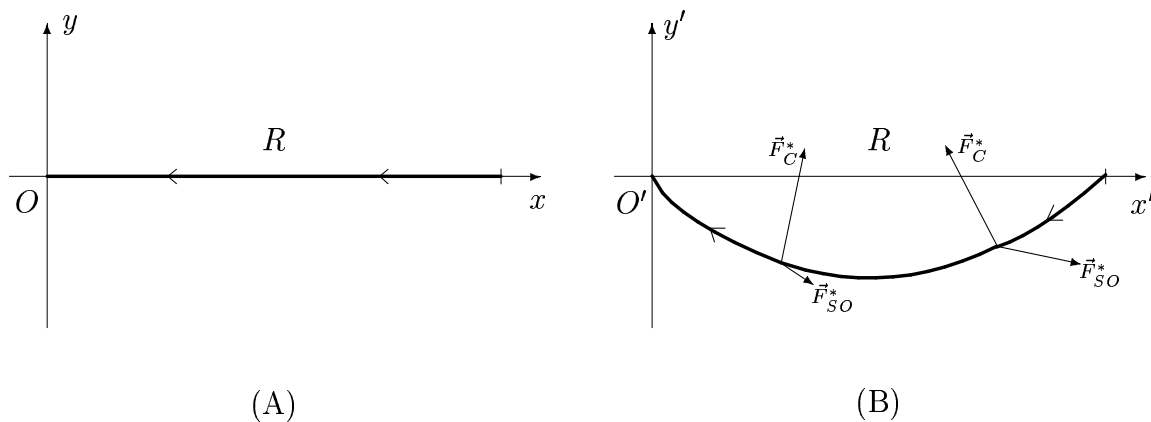
V soustavě $\mathcal{S}$ má správně namířený míč hozený v čase $t = 0$ souřadnice

$$\begin{aligned}x(t) &= R - v_0 t \cos \varphi, \\y(t) &= 0, \\z(t) &= v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}\tag{4}$$

Jejich dosazením do transformačních vztahů (3) získáme souřadnice míče v $\mathcal{S}'$

$$\begin{aligned}x'(t) &= (R - v_0 t \cos \varphi) \cos \omega t, \\y'(t) &= -(R - v_0 t \cos \varphi) \sin \omega t, \\z'(t) &= v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}\tag{5}$$

Bereme-li $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, vychází z (1) číselně $\varphi_1 \doteq 35^\circ$ a $\varphi_2 \doteq 55^\circ$. Pro φ_1 pak z (2) $\delta_1 \doteq 66^\circ$, pro φ_2 je $\sin \delta_2 > 1$, tedy úhel δ_2 není definován. Po dosazení číselných hodnot zakreslíme podle (4) a (5) průmět trajektorie správně namířeného míče do vodorovné roviny vzhledem k Zemi (viz obr. 8A) a vzhledem ke kolotoči (viz obr. 8B, v němž je rovněž schematicky znázorněn směr Coriolisovy síly ${}^7 \vec{F}_C^*$ a síly setrvačné odstředivé $\vec{F}_{SO}^*$).



Obr. 8

⁷V zadání byl pro velikost Coriolisovy síly omylem uveden vztah $F_C^* = mv\omega \sin \alpha$, správně je $F_C^* = 2mv\omega \sin \alpha$.