

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

6. ročník — 1999/2000

Vzorová řešení 3. série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (8 bodů)

Míč

Odrazy míče od stropu i podlahy jsou nepružné. Velikost rychlosti míče po každém odrazu je o něco menší než bezprostředně před ním, tj. $v_{po\ odrazu} = kv_{pred\ odrazem}$, kde $k < 1$. Pro kinetickou energii proto platí:

$$E_{po\ odrazu} = k^2 E_{pred\ odrazem}. \quad (1)$$

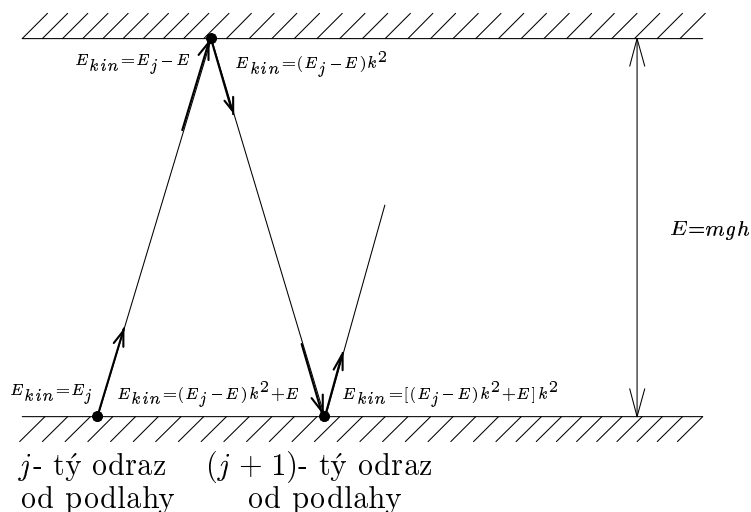
Při řešení úlohy vyjdeme z vyjádření kinetické energie míče před dopadem a po odrazu od stropu a před dopadem a po odrazu od podlahy:

- a) Předpokládejme, že míč absolvoval j -tý odraz od podlahy. Těsně po něm má kinetickou energii E_j a potenciální energii nulovou. Těsně před následujícím dopadem na strop má potenciální energii $E = mgh$ a kinetickou energii $E_j - E = E_j - mgh$.
- b) Podle (1) je kinetická energie míče po odrazu od stropu dána vztahem $(E_j - E)k^2$.
- c) Kinetická energie před následujícím dopadem na podlahu je o hodnotu $E = mgh$ větší než kinetická energie po odrazu od stropu. Má tedy hodnotu

$$(E_j - E)k^2 + E = (E_j - E)k^2 + mgh. \quad (2)$$

- d) Pro kinetickou energii po $(j + 1)$ -tém odrazu od podlahy platí:

$$E_{j+1} = [(E_j - E)k^2 + E]k^2. \quad (3)$$



obr. 1

Aby míč dosáhl stropu, musí být jeho kinetická energie po j -tém odrazu od podlahy větší nebo rovna potenciální energii ve výšce h , tj. $E_j \geq 30$ J. Z následující tabulky vidíme, že kinetická energie míče po šestém odrazu od podlahy již tuto nerovnost nesplňuje a celkový počet odrazů od stropu je tedy šest. V jednotlivých sloupcích tabulky jsou uvedeny kinetické energie vypočtené podle vztahů v bodech a) – d). Počáteční kinetická energie po vyhození míče je rovna $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$, kde hmotnost míče si zvolíme rovnu 1 kg.

Odraz od stropu č.	Kin. energie před dopadem na strop [J]	Kin. energie po odrazu od stropu [J]	Odraz od podlahy č.	Kin. energie před odrazem od podlahy [J]	Kin. energie po odrazu od podlahy [J]
1	170,0	137,7	1	167,7	135,8
2	105,8	85,7	2	115,7	93,7
3	63,7	51,6	3	81,6	66,1
4	36,1	29,2	4	59,2	47,9
5	17,9	14,5	5	44,5	36,1
6	6,1	4,9	6	34,9	28,3
7	–	–	7	–	–

Poznámka: Problém lze řešit i analyticky. Postupným upravováním vztahu (3) mezi kinetickou energií po j -tém a $(j+1)$ -tém odrazu od podlahy získáme:

$$E_{j+1} = E_j k^4 - E k^4 + E k^4 = E_j k^4 + E k^2(1 - k^2). \quad (4)$$

V předchozí rovnici vyjádříme E_j pomocí vztahu (3):

$$E_{j+1} = k^4[E_{j-1}k^4 + E k^2(1 - k^2)] + E k^2(1 - k^2) = E_{j-1}k^8 + E k^2(1 - k^2)(1 + k^4), \quad (5)$$

$$E_{j+1} = E_{j-s}k^{4(s+1)} + E k^2(1 - k^2)(1 + k^4 + k^8 + \dots + k^{4s}). \quad (6)$$

Dosadíme $s = j$:

$$E_{j+1} = k^{4(j+1)}E_0 + E k^2(1 - k^2) \underbrace{(1 + k^4 + k^8 + \dots + k^{4j})}_{\text{geom. posloupnost, } n=j+1, q=k^4, a_1=1}. \quad (7)$$

Pomocí vztahu pro součet členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ přepíšeme výraz do tvaru :

$$E_{j+1} = k^{4(j+1)} E_0 + Ek^2(1-k^2) \frac{1-k^{4(j+1)}}{1-k^4}. \quad (8)$$

Dále upravujeme:

$$E_{j+1} = k^{4(j+1)} E_0 + \frac{Ek^2(1-k^{4(j+1)})}{1+k^2} = \frac{k^{4(j+1)} E_0(1+k^2) + Ek^2(1-k^{4(j+1)})}{1+k^2}, \quad (9)$$

$$E_{j+1} = \frac{E_0 k^{4(j+1)} + k^2 E_0 k^{4(j+1)} + Ek^2 - Ek^2 k^{4(j+1)}}{1+k^2}, \quad (10)$$

$$E_{j+1} = \frac{k^{4(j+1)} [E_0 + k^2(E_0 - E)] + k^2 E}{1+k^2}. \quad (11)$$

Obdobně si můžeme vyjádřit kinetickou energii po j -tém odrazu od podlahy E_j :

$$E_j = \frac{k^{4j} [E_0 + k^2(E_0 - E)] + k^2 E}{1+k^2}. \quad (12)$$

Po j -tém odrazu od podlahy míč dosáhne stropu a vykoná poslední $(j+1)$ -tý odraz od stropu tehdy, když kinetická energie míče po j -tém odrazu od podlahy je větší nebo rovna změně potenciální energii $E = mgh$ a zároveň je jeho kinetická energie po $(j+1)$ -tém odrazu od podlahy již menší než hodnota E (míč už tedy ke stropu nedoletí):

$$(E_j \geq E) \quad \wedge \quad (E_{j+1} < E). \quad (13)$$

Do první nerovnosti dosadíme ze vztahu (12) a upravíme:

$$E_j \geq E \quad \Rightarrow \quad k^{4j} [E_0 + k^2(E_0 - E)] + k^2 E \geq (1+k^2)E, \quad (14)$$

$$k^{4j} \geq \frac{E}{E_0 + k^2(E_0 - E)}. \quad (15)$$

Po zlogaritmování dostaneme:

$$4j \ln k \geq \ln \frac{E}{E_0 + k^2(E_0 - E)}. \quad (16)$$

Při dělení výrazem $\ln k$ nesmíme zapomenout obrátit nerovnost ($k < 1$, proto $\ln k < 0$):

$$j \leq \frac{1}{4 \ln k} \ln \frac{E}{E_0 + k^2(E_0 - E)}. \quad (17)$$

Obdobně postupujeme při úpravách druhé nerovnosti (13), kam dosadíme ze vztahu (11) :

$$E_{j+1} < E \quad \Rightarrow \quad k^{4(j+1)} [E_0 + k^2(E_0 - E)] + k^2 E < (1+k^2)E, \quad (18)$$

$$j > \frac{1}{4 \ln k} \ln \frac{E}{E_0 + k^2(E_0 - E)} - 1. \quad (19)$$

Spojením nerovností (17) a (19) dostaneme:

$$\frac{1}{4 \ln k} \ln \frac{E}{E_0 + k^2(E_0 - E)} - 1 < j \leq \underbrace{\frac{1}{4 \ln k} \ln \frac{E}{E_0 + k^2(E_0 - E)}}_V. \quad (20)$$

Dosadíme do výrazu V číselné hodnoty, kde hmotnost míče si zvolíme rovnu 1 kg:

$$V = \frac{1}{4 \ln k} \ln \frac{mgh}{\frac{1}{2}mv_0^2 + k^2(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgh)} = \frac{1}{4 \ln 0,9} \ln \frac{1 \cdot 10 \cdot 3}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20^2 + 0,81(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20^2 - 1 \cdot 10 \cdot 3)} = 5,73$$

$$V - 1 < j \leq V \quad \Rightarrow \quad j = 5.$$

Počet odrazů od stropu je o jeden větší – odrazů je tedy 6.

Vzorové řešení úlohy č. 2 (5 bodů)

Pistolka

Podle zadání známe vztah mezi hmotnostmi kuličky a její rychlostí.

- a) Rychlost střely je v pro hmotnost kuličky m .
- b) Rychlost střely je $v\sqrt{\frac{2}{3}}$ pro hmotnost kuličky $2m$.
- c) Pro hmotnost kuličky $3m$ je rychlost neznámá, v_x .

Úlohu budeme řešit pomocí zákona zachování mechanické energie. Součet kinetické energie střely $E_{k,s}$, kinetické energie pružiny $E_{k,p}$ a potenciální energie pružiny E_p je v každém okamžiku stejný pro všechny tři různé hmotnosti kuličky a jim odpovídající rychlosti, tj.

$$E_p = E_{k,s} + E_{k,p}. \quad (1)$$

Dále je zřejmé, že potenciální energie stlačené pružiny je všech třech případech stejná. Potenciální energie pružiny se pak přemění v kinetickou energii kuličky a kinetickou energii pružiny. Pro první dva případy známe velikost kinetické energie kuličky, neznáme však kinetickou energii pružiny, ani potenciální energii pružiny. Víme, že v napjatém stavu má konec pružiny rychlost v . Element pružiny o hmotnosti Δm v poloze x má rychlost $v(x)$ (viz obr. 1), tj.

$$v(x) = v \frac{x}{l}. \quad (2)$$

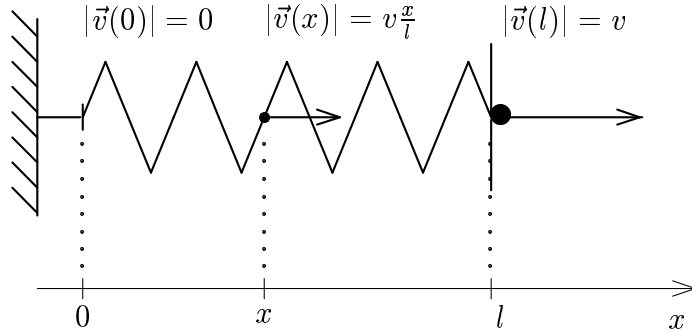
Kinetická energie obecného elementu pružiny je tedy

$$\Delta E_{k,p} = \frac{1}{2} \Delta m v^2(x) = \frac{1}{2} \Delta m \frac{x^2}{l^2} v^2. \quad (3)$$

Protože je kinetická energie libovolného elementu pružiny přímo úměrná čtverci rychlosti v^2 , bude i celková kinetická energie pružiny úměrná v^2 , tj.

$$E_{k,p} = \frac{1}{2} k v^2, \quad (4)$$

kde k je zatím neznámá konstanta.



obr.1

Konstantu k a potenciální energii E_p vypočítáme ze soustavy dvou rovnic popisujících zákon zachování energie pro první dva případy.

$$E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kv^2 = v^2 \left(\frac{m}{2} + \frac{k}{2} \right) \quad (5)$$

$$E_p = \frac{1}{2}(2m) \left(v\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + \frac{1}{2}k \left(v\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 = v^2 \left(\frac{2m}{3} + \frac{k}{3} \right) \quad (6)$$

Porovnáním dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} + \frac{k}{2} &= \frac{2m}{3} + \frac{k}{3}, \\ k &= m \end{aligned} \quad (7)$$

a dosazením do vztahu pro potenciální energii

$$E_p = mv^2. \quad (8)$$

Nyní, když známe potenciální energii stlačené pružiny E_p a konstantu k , můžeme určit rychlost kuličky v_x pro její hmotnost $3m$. Potenciální energii vyjádříme jako

$$E_p = \frac{1}{2}(3m)v_x^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 \quad (9)$$

a porovnáním s potenciální energií stlačené pružiny

$$E_p = mv^2$$

dostaneme

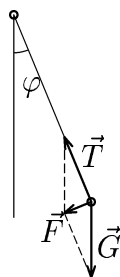
$$\begin{aligned} mv^2 &= \frac{3}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_x^2, \\ v_x &= \frac{v}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

což je námi hledaná velikost rychlosti kuličky o hmotnosti $3m$.

Vzorové řešení úlohy č. 3 (6 bodů)

Opice na žebříku

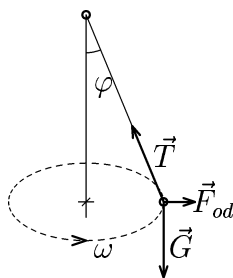
Nejprve se stručně podívejme na situaci, kdy je opice od zavěšení žebříku vzdálena l a žebřík se netočí. Je jasné, že žebřík bude viset ve svislé poloze. O této poloze vám každý fyzik řekne, že je stabilní. Definice stability existuje více, ale všechny říkají v podstatě toto: Stav systému nazveme stabilním tehdy, když při jeho malé změně vznikají procesy (síly), které jej vrací zpět do původní polohy¹. Když tedy žebřík s opicí, který se chová jako hmotný bod na nehmotném závěsu, vychýlíme z rovnovážné polohy o nějaký velmi malý úhel φ , výslednice $\vec{F} = \vec{G} + \vec{T}$ tíhové síly $\vec{G}$ působící na opici a tahové síly žebříku $\vec{T}$ způsobí, že se žebřík zhoupne zpět do rovnovážné polohy.



obr. 1

Co se stane, když bude žebřík rotovat kolem svislé osy? Na první pohled nic, protože osa prochází opicí a případná odstředivá síla² je nulová, nezávisle na rychlosti rotace žebříku nebo vzdálenosti opice od závěsu. Pokud se žebřík vychýlí ze svislé polohy o libovolně malý úhel φ , bude na opici působit nenulová odstředivá síla $F_{od} = m\omega^2 l \sin \varphi$. Musíme zjistit, jak tato síla změní situaci opice. Za určitých podmínek, např. když je ω dost malé, bude F_{od} také malá a výslednice tíhové síly a tahové síly žebříku vrátí opici zpět do svislé polohy. Zcela jistě existují takové hodnoty ω , l a φ , že odstředivá síla právě vyrovná působení ostatních sil a opice si bude klidně obíhat po kružnici...

Ověřme, že taková situace skutečně nastane. Pokud ano, pak takový pohyb bude rovnoměrný. V neinerciální vztažné soustavě spojené s žebříkem na opici působí tíhová síla $\vec{G}$ a tahová síla žebříku $\vec{T}$ (skutečné síly) a odstředivá síla (fiktivní neboli setrvačná). Jejich výslednice je nulová, neboť opice má vůči žebříku nulové zrychlení, tj. $\vec{G} + \vec{T} + \vec{F}_{od} = \vec{0}$.



obr. 2

¹Stabilita se nemusí týkat jen pevných těles nějak uložených v prostoru.

²Posuzujeme-li pokus z neinerciální vztažné soustavy spojené s rotujícím žebříkem.

Situaci znázorňuje obr. 2, odkud zřejmě plyne:

$$\begin{aligned} F_{od} = mg \operatorname{tg} \varphi &\Rightarrow mg \operatorname{tg} \varphi = m\omega^2 l \sin \varphi, \\ \Rightarrow \cos \varphi &= \frac{g}{\omega^2 l}. \end{aligned} \quad (1)$$

Pokud úhel φ maličko zvýšíme, převáží výslednice tíhové síly a tahové síly vlákna nad silou odstředivou a to způsobí, že sklon žebříku klesne. Pokud úhel φ trošku snížíme, převáží naopak odstředivá síla a sklon žebříku se zvýší. To znamená, že taková poloha, která splňuje rovnici (1), bude stabilní³!

Pokud se opice přiblíží k závěsu (povyže), zkrátí se l a rovnovážný úhel klesne. Při vzdálení od závěsu je situace opačná. Svislá poloha žebříku ($\varphi = 0$) bude stabilní, je-li

$$\frac{g}{\omega^2 l} \geq 1.$$

Pro zadané hodnoty bude kritická vzdálenost opice od zavěšení žebříku $l_{krit.} = \frac{g}{\omega^2} \doteq 0.0025$ m. Všimněte si prosím, že výsledek nezávisí na hmotnosti opice (závisel by, kdyby byla hmotnost žebříku nezanedbatelná). A proč je numerická hodnota tak malá? Podívejte se na zadanou hodnotu úhlové rychlosti: Ten žebřík rotuje desetkrát za sekundu! Obávám se, že toto by nevydrželi ani šimpanzi trénovaní v NASA.

Vzorové řešení úlohy č. 4 (6 bodů)

Lichoběžník

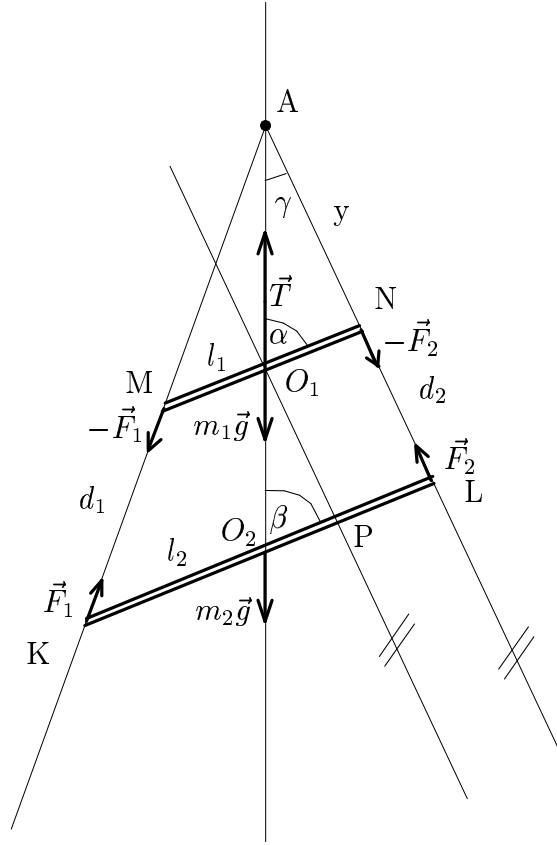
Nejprve předpokládejme, že jsou nitě šikmé, jak je vidět na obr. 1. Pro rovnováhu soustavy musí platit, že výsledný moment vnějších sil působících na soustavu je nulový. Působící vnější síly jsou tyto:

$$m_1 \vec{g}, \quad m_2 \vec{g}, \quad \vec{T}.$$

Působíště tíhové síly je vždy ve středu tyče (tyč je homogenní), působíště síly $\vec{T}$ je v bodě O_1 . Momenty těchto sil budeme uvažovat vzhledem ke vztažnému bodu O_1 . Momenty sil $m_1 \vec{g}$ a $\vec{T}$ jsou nulové, protože jejich působíště leží v bodě O_1 . Z toho plyne, že i moment síly $m_2 \vec{g}$ musí být nulový. Vektorová příčka tíhové síly $m_2 \vec{g}$ tedy musí bodem O_1 procházet. Těžiště dolní tyče proto leží na svislici pod bodem O_1 .

Výsledný moment všech sil, působících na každou tyč, musí být nulový. Na dolní tyč působí síly $m_2 \vec{g}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$; na horní tyč působí síly $m_1 \vec{g}$, $-\vec{F}_1$, $-\vec{F}_2$, $\vec{T}$. Síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $-\vec{F}_1$, $-\vec{F}_2$ jsou tahové síly vláken a jejich odpovídající reakce. Aby výsledný moment na dolní (resp. horní) tyč byl nulový, nositelky sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (resp. $-\vec{F}_1$, $-\vec{F}_2$) působících na nit se musí protnout v jednom bodě A na svislici jdoucí oběma těžišti tyčí, jak je nakresleno na obr. 1.

³Plyne to z faktu, že $\operatorname{tg} x \geq \sin x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.



obr. 1

Nyní dokážeme rovnoběžnost tyčí. Sestrojíme bod P takto: Bod P leží na průniku přímky $\overleftrightarrow{KL}$ a přímky rovnoběžné s přímkou $\overleftrightarrow{AL}$ jdoucí bodem O_1 . Úhel $\angle O_1AN$ označme γ , úhel $\angle AO_1N$ α a úhel $\angle AO_2L$ β . Délky jednotlivých stran označme $|NL| = d_2$, $|KL| = l_2$, $|KM| = d_1$, $|MN| = l_1$ a $|AN| = y$.

Rovnoběžnost stran KL a MN dokážeme ze shodnosti úhlů α a β . Trojúhelníky $\triangle O_1O_2P$ a $\triangle AO_2L$ jsou zřejmě podobné. Úhel $\angle O_2O_1P$ má tedy stejnou velikost jako úhel γ . Z vlastností podobných trojúhelníků můžeme spočítat velikost strany AN . Platí

$$\frac{d_2}{\frac{l_2-l_1}{2}} = \frac{y+d_2}{\frac{l_2}{2}}, \quad (1)$$

z čehož jednoduchou úpravou dostaneme, že $y = \frac{l_1 d_2}{l_2 - l_1}$. Aplikací sinové věty na trojúhelník $\triangle O_1O_2P$ dostaneme

$$\frac{\sin \gamma}{\frac{l_2-l_1}{2}} = \frac{\sin \beta}{d_2}. \quad (2)$$

Analogicky použitím sinové věty pro trojúhelník $\triangle AO_1N$ dostáváme

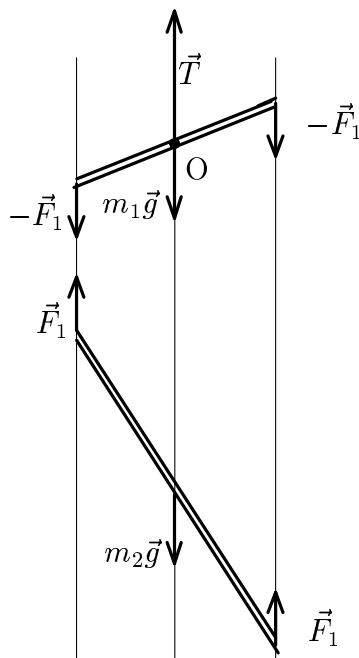
$$\frac{\sin \gamma}{\frac{l_1}{2}} = \frac{\sin \alpha}{y}. \quad (3)$$

Nyní do rovnice (3) dosadíme z rovnic (1) a (2) a úpravou získáme

$$\sin \alpha = \sin \beta. \quad (4)$$

Rovnice (4) má pro $\triangle AO_2L$ jediné řešení $\alpha = \beta$, přičemž případ, kdy $\alpha = \beta = 0$, je rozebrán v následující části. Vidíme tedy, že tyče jsou rovnoběžné.

Nyní předpokládejme, že jsou nitě svislé, jak je vidět na obr. 2. Pro rovnováhu soustavy musí platit totéž co v předchozí části.



obr. 2

Stejně jako v minulém případě výsledný moment všech sil působících na každou tyč musí být roven $\vec{0}$. Aby byla splněna momentová rovnováha pro každou tyč, nositelky sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (resp. $-\vec{F}_1, -\vec{F}_2$) působících na nit musí být rovnoběžné se svislicí O_1O_2 , nemohou se s ní tedy protnout. Proto můžeme tuto konfiguraci považovat za speciální případ minulého uspořádání s tím, že nositelky sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (resp. $-\vec{F}_1, -\vec{F}_2$) se s přímkou O_1O_2 protnou v nekonečnu.

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

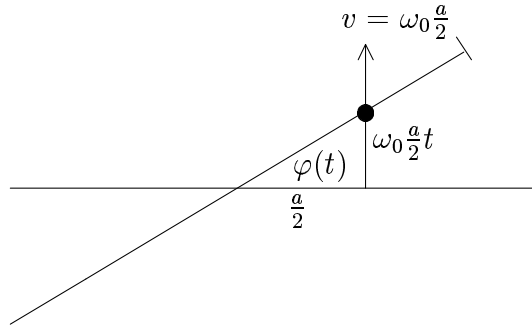
Tyč s kuličkami

Uvažujme o silách působících na kuličky: Tíhová síla, již působí na každou kuličku Země, je kompenzována svislým průmětem tlakové síly, již působí na kuličky tyč. Třecí síly jsou zanedbatelné. Vodorovný průmět tlakové síly tyče na kuličku označme $\vec{N}$, resp. $-\vec{N}$ (viz obr. 1 – nadhled). Tento průmět je ovšem nulový, neboť jinak by kuličky na tyč působily opačnými silami $-\vec{N}, \vec{N}$. Hmotnost tyče je nulová. Při nenulových silách by tedy tyč měla nekonečně velké úhlové zrychlení. Proto je $N = 0$.



obr. 1

Výslednice sil působících na kuličky je rovna nule, kuličky konají pohyb rovnoměrný přímočarý s počáteční rychlostí o velikosti $\omega_0 \frac{a}{2}$ až do okamžiku nárazu na zarážku.



obr. 2

Výpočet: Z obrázku vyplývá:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 \frac{a}{2} t}{\frac{a}{2}} = \omega_0 t, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) = \omega_0(t + \Delta t). \quad (2)$$

S použitím součtového vzorce $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \Delta\varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Delta\varphi}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{tg} \varphi = \omega_0 \Delta t = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \Delta\varphi - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg} \Delta\varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Delta\varphi}. \quad (4)$$

Pro malé hodnoty $\Delta\varphi$ platí:

$$\Delta\varphi \approx \operatorname{tg} \Delta\varphi, \quad (5)$$

$$\omega_0 \Delta t = \frac{\Delta\varphi(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Delta\varphi} \Rightarrow \omega_0 \Delta t - \omega_0 \Delta\varphi \Delta t \operatorname{tg} \varphi = \Delta\varphi + \Delta\varphi \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (6)$$

Po zanedbání součinů a vyšších mocnin malých veličin dostáváme:

$$\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\omega_0}{1 + (\omega_0 t)^2}. \quad (7)$$

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2 t^2}. \quad (8)$$

Takto se bude měnit úhlová rychlost do okamžiku nárazu na zarážku.

Poznámka: Výpočet $\omega(t)$ lze také provést následujícím (elegantnějším) způsobem, využívajícím diferenciální počet:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\omega_0 \frac{a}{2} t}{\frac{a}{2}} = \omega_0 t \quad / \frac{d}{dt}, \quad (9)$$

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\cos^2 \varphi(t)} = \omega_0, \quad (10)$$

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot \cos^2 \varphi(t) = \omega_0 \left(\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\omega_0 \frac{a}{2} t)^2}} \right)^2, \quad (11)$$

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2 t^2}. \quad (12)$$