

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

6. ročník — 1999/2000

Vzorová řešení 4. série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č.1 (8 bodů)

Z Aristotelova díla

Aristotelovy závěry budeme posuzovat v pořadí uvedeném v zadání úlohy.

- Pojem tíže – velmi dlouho chápaný pouze intuitivně – bychom dnes nahradili pojmem hmotnost, který ve spojitosti s pohybovými zákony korektně zavedl až britský matematik a fyzik Isaac Newton (1643 – 1727). Hmotnost je v rámci klasické fyziky (tj. fyziky objektů přístupných našemu smyslovému vnímání, pohybujících se rychlostí mnohem menší než světlo) skutečně základní a neměnnou charakteristikou každého tělesa.

Sílu Aristoteles definoval jako příčinu „vynucených“ pohybů, tedy jako určitý *vnější zásah* potřebný k tomu, aby se takový pohyb vůbec uskutečnil. V tomto smyslu byly úvahy o svislém pohybu lehkých a těžkých těles správné, dnešní výklad pozorované skutečnosti je však zcela odlišný. Od dob Newtona totiž silou rozumíme veličinu popisující vzájemnou interakci hmotných těles, která vede ke změně jejich tvaru nebo pohybového stavu. Pohyb daného tělesa pak prostřednictvím druhého Newtonova zákona předepisuje výslednice všech na něj působících sil, např.:

- Na kouř jako na makroskopický soubor molekul ohřátého plynu působí tíhová síla a síla daná neustálými nárazy molekul okolního vzduchu (vyjádření této síly je velmi obtížné, neboť kouř není od okolního prostředí nikterak oddělen a za postupného „promíchávání se“ s molekulami vzduchu se jak rozpíná, tak i stoupá vzhůru).
- Na kámen působí tíhová síla, vztlaková síla a odporová síla vzduchu. Protože kámen má větší hustotu než vzduch, je výsledná síla orientována svisle dolů a kámen klesá.

Stejně tak je i pohyb planet, považovaný v prvním přiblížení za kruhový, podmíněn silovým působením: gravitační síla, jíž působí na planetu Slunce, je silou dostředivou, která mění směr rychlosti planety.

- Druhý z Aristotelových závěrů je i z dnešního pohledu správný. V reálných situacích se totiž vždy (více nebo méně významně) uplatňuje odpor prostředí, a proto je k udržení rovnoměrného vodorovného pohybu nutné působení stále vnější síly, která odpor prostředí překonává. (V idealizovaném případě, kdy lze tření považovat za nulové, však k udržení rovnoměrného pohybu žádné vnější síly potřeba není!)
- Charakteristika pohybu volně puštěných těles je obecně nesprávná. Jako protipříklad mohou posloužit dva listy kancelářského papíru, z nichž jeden roztrhneme a půlku zmačkáme do malé kuličky: pozorujeme, že kulička padá mnohem rychleji než nepoškozený arch, přestože má vzhledem k němu menší hmotnost. Detailní matematický popis pohybu těles v odporujícím prostředí (např. vzduch) vychází z druhého Newtonova zákona, ale přesahuje středoškolský rámec. Proto pouze konstatujeme, že závislost rychlosti tělesa na čase je určena jeho tvarem a hustotou a viskozitou odporujícího prostředí.

Experimentálním studiem pádu těles se jako první zabýval italský matematik a fyzik Galileo Galilei (1564 – 1642). Dokázal při tom, že ve vakuu by všechna tělesa padala se stejným zrychlením.

- Aristotelovo pojetí prostoru spojitě vyplněného hmotou mělo již ve své době vážnou konkurenci. Byla jí představa o atomech, které se pohybují v *prázdném prostoru*, formulovaná v základních tezích Leukippem z Milétu (asi 500 – 440 př. n. l.) a podrobněji rozpracovaná Démokritem z Abdér (asi 460 – 370 př. n. l.). Obě soupeřící teorie však tehdy vycházely z čistě filozofických spekulací a nezakládaly se na žádném pokusu či pozorování. Teprve experimenty provedené na počátku 20. století francouzským fyzikálním chemikem Jeanem Baptistem Perrinem (1870 – 1942) definitivně rozhodly ve prospěch atomistické koncepce. Tzv. horror vacui – „strach přírody z prázdnoty“ – byl vyvrácen známým pokusem navrženým italským matematikem a fyzikem Evangelistou Torricellim (1608 – 1647): v trubici se zataveným koncem dosahuje rtuťový sloupec maximální výšky 0,76 m, nad ním je pak vakuum.
- Podstatu zvuku i vznik ozvěny vyložil Aristoteles správně, přestože jeho závěry byly opět čistě spekulativní a nezakládaly se na žádné experimentální zkušenosti.

Vzorové řešení úlohy č.2 (6 bodů)

Heuréka!

(a) Archimédes si v lázni povšiml, že čím hlouběji se ponoří do vany, tím více vody z ní vyteče ven. Tato zkušenost jej přivedla k pojmu *hustota tělesa* a k jednoduché metodě jejího určování:

1. Vyvážením na pátce zjistil hmotnost M zkoumaného tělesa.
2. Těleso zcela ponořil do nádoby po okraj naplněné vodou a stanovil hmotnost vody m , která vytekla.
3. Výraz $\frac{M}{m}$ udává poměr hustoty tělesa a hustoty vody.

Popsanou metodou je možné určit také hustotu ρ_Z ryzího zlata, hustotu ρ_S stříbra i hustotu ρ_K královské koruny. Získané údaje dovolují vypočítat poměr p hmotnosti zlata a stříbra obsaženého v koruně. Platí

$$M_K = M_Z + M_S = M_S (p + 1),$$

kde M_Z (resp. M_S) značí hmotnost zlata (resp. stříbra) v koruně a M_K celkovou hmotnost koruny. Podobně můžeme pro odpovídající objemy psát

$$V_K = V_Z + V_S = \frac{M_Z}{\rho_Z} + \frac{M_S}{\rho_S} = M_S \left(\frac{p}{\rho_Z} + \frac{1}{\rho_S} \right).$$

Podělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{M_K}{V_K} = \rho_K = \frac{p + 1}{\frac{p}{\rho_Z} + \frac{1}{\rho_S}} \Rightarrow p = \frac{\rho_Z}{\rho_S} \left(\frac{\rho_K - \rho_S}{\rho_Z - \rho_K} \right).$$

(b) Podvod by ve své době zůstal neodhalen jen tehdy, kdyby by byl do koruny místo stříbra přidán materiál o stejné hustotě jako zlato. V MFChT zjistíme, že taková látka se v přírodě běžně nevyskytuje, a proto by musela být připravena uměle – např. jako slitina, která ovšem nesmí se zlatem chemicky reagovat. Takový úkol ale není triviální a je jen málo pravděpodobné, že by se jím ve starověkém Řecku vůbec někdo zabýval.

(c) Přítomnost příměsí v koruně může odhalit např.:

- *Spektrální analýza*, která je založena na skutečnosti, že po absorpci energie (např. rentgenového záření) dojde k excitaci elektronů v jednotlivých atomech zkoumaného vzorku. Elektrony posléze sestupují do původních – energeticky chudších stavů za současné emise elektromagnetického záření, charakteristického pro daný prvek. Ze zjištěných spektrálních čar lze stanovit chemické složení vzorku i procentuální zastoupení jeho složek.
- *Hmotnostní spektroskopie*, při níž se část vzorku odpaří, ionizuje a nechá procházet elektromagnetickým polem. Z parametrů trajektorie iontů v elektromagnetickém poli lze určit jejich hmotnost a tím i druh.

Vzorové řešení úlohy č.3 (6 bodů)

Měříme Zeměkouli

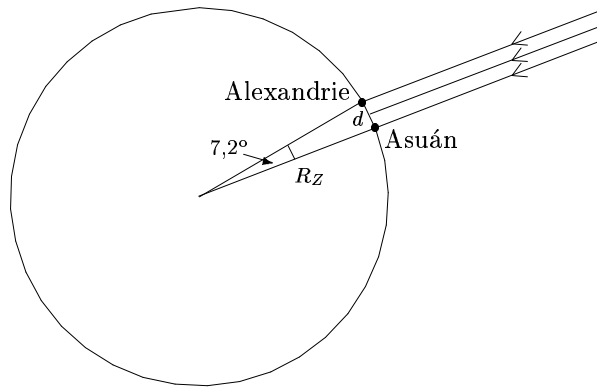
(a) Vyjdeme – podobně jako Eratosthenés – z předpokladu, že Země má tvar koule a Asuán s Alexandrií leží na téže poledníku. Podle obr. 1 platí

$$\frac{7,2^\circ}{d} = \frac{360^\circ}{2\pi R_Z} \Rightarrow R_Z = \frac{360^\circ}{7,2^\circ} \frac{d}{2\pi},$$

ke stanovení poloměru Země tedy ještě potřebujeme znát vzdálenost Asuánu a Alexandrie. Eratosthenés ji odhadoval z průměrné doby pochodu karavan mezi oběma městy, dnes však již pohodlně přečteme z mapy, že $d \doteq 780$ km. Dosazením do předchozího vztahu získáme výsledek

$$R_Z \doteq 6200 \text{ km},$$

který je srovnatelný s hodnotou 6370 km udávající poloměr koule o stejném objemu jako zemské těleso, resp. s rovníkovým poloměrem Země 6380 km (převzato z MFChT).



Obr. 1

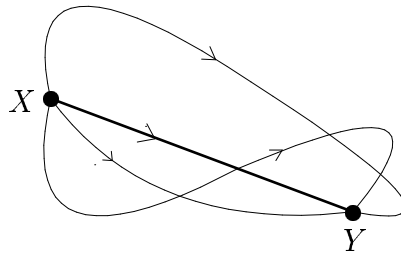
(b) Nejzávažnější chyby, jichž se Eratosthenés dopustil, pramení ze samotných vstupních předpokladů: především Alexandrie neleží na stejném poledníku jako Asuán – rozdíl zeměpisných délek činí podle mapy přibližně 3° . Podobně také Asuán neleží na obratníku Raka, ale asi o 1° výše, a proto v něm při rovnodennosti nestojí Slunce přesně v nadhlavníku. Zajímavé je, že tyto nedostatky původní výsledek téměř neovlivnily, protože byly eliminovány nepřesností odhadu vzdálenosti Asuánu a Alexandrie.

(c) Eratosthenova metoda stanovení rozměrů Země je použitelná pro jakoukoli dvojici míst, které neleží na jedné rovnoběžce, potřebujeme ovšem znát jejich „severo-j jižní vzdálenost“ (tj. velikost průmětu jejich přímé spojnice do severojižního směru). Na vybraných stanovištích pak měříme polohu Slunce vždy v okamžiku, kdy prochází místním poledníkem.

Vzorové řešení úlohy č.4 (5 bodů)

„Pohodlné“ světlo

(a) Uvažujme libovolné dva body X, Y homogenního prostředí a systém všech křivek, které je spojují. Nejkratší z křivek odpovídá přímé spojnici bodů (viz obr. 2) – světlo se proto mezi nimi šíří přímočaře.

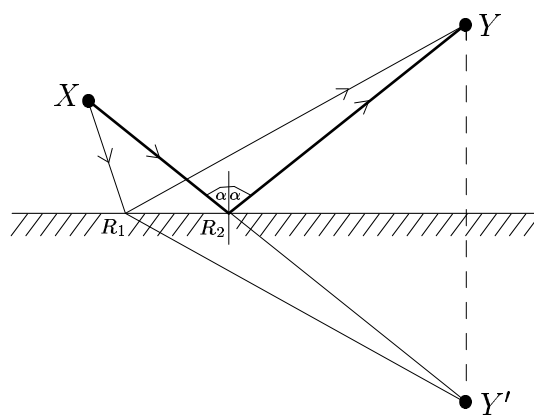


Obr. 2

Předpokládejme nyní, že světlo z bodu X dospěje do bodu Y po odrazu od rovinného zrcadla (viz obr. 3). Sestrojme zrcadlový obraz Y' bodu Y a označme R bod odrazu. Vzhledem k tomu, že se světlo mezi body X, R a R, Y šíří přímočaře, dostáváme pro jeho celkovou dráhu

$$l = |XR| + |RY| = |XR| + |RY'|.$$

Odtud je zřejmé, že světlo se z bodu X do bodu Y šíří po nejkratší možné dráze právě tehdy, když bod R leží na úsečce XY' , tj. když je splněn zákon odrazu.



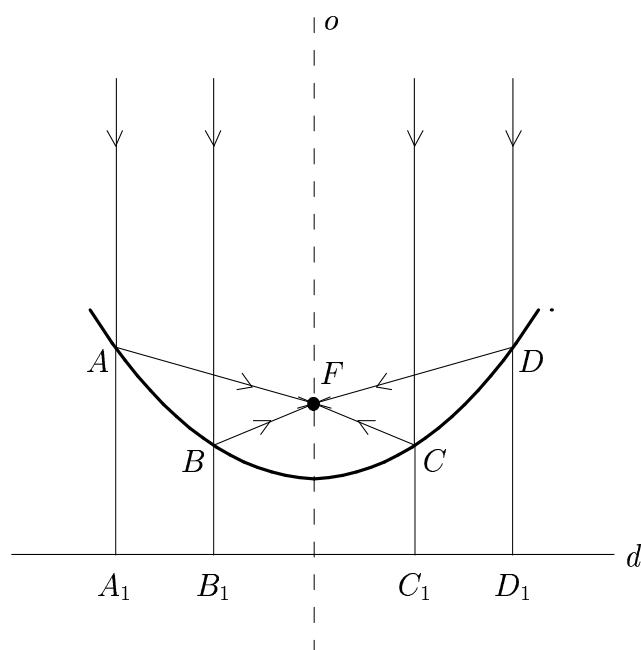
Obr. 3

(b) Zabývejme se nejprve modelovým případem, kdy rovinný svazek světelných paprsků dopadá na zrcadlo tvaru paraboly rovnoběžně s její osou symetrie o (viz obr. 4). Prodloužíme-li myšlenkově dopadající paprsky až k řídící přímce d paraboly (úsečky AA_1 , BB_1 , CC_1 a DD_1), jsou dráhy takto získaných paprsků totožné a přitom nejkratší možné. Parabola je ovšem množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od řídící přímky jako od ohniska F , proto platí

$$|AA_1| = |AF|, \quad |BB_1| = |BF|, \quad |CC_1| = |CF| \quad \text{a} \quad |DD_1| = |DF|,$$

tedy paprsky rovnoběžné s osou parabolického zrcadla se po odrazu protínají v jediném bodě – ohnisku. Současně ale platí (opět podle principu nejkratší dráhy světla), že z bodu X do bodu Y přejde světlo po téže trajektorii jako z bodu Y do bodu X , takže paprsky vycházející z ohniska tvoří po odrazu od zrcadla rovnoběžný svazek. Získané závěry snadno zobecníme na reálnou prostorovou situaci rotací paraboly kolem její osy.

Parabolické odrazné plochy se používají v osvětlovacích zařízeních (reflektory), ve zobrazovacích soustavách (dalekohledy) a ve sdělovací technice (satelity).



Obr. 4

(c) Herónův princip nejkratší dráhy světla se vztahuje pouze na body homogenního prostředí a nelze jím tudíž popsat lom světla, pozorovaný opět již ve starověkém Řecku. Dá se však ukázat, že zákony geometrické optiky (tj. zákon přímočarého šíření světla, zákon odrazu a zákon lomu) jsou důsledkem obecnějšího *principu minimálního času*, který formuloval francouzský matematik Pierre Fermat (1601 – 1665): světlo se mezi libovolnými dvěma body šíří tak, aby vzdálenost mezi nimi urazilo za nejkratší možnou dobu.

Vzorové řešení úlohy č.5 – prémiové

A přece se točí!

(a) Názor, že volně puštěná tělesa by na rotující Zemi nemohla padat po přímce, vycházel z aristotelovské fyziky, která neznala pojem *setrvačnosti*. Stoupenci geocentrismu se totiž domnívali, že zatímco těleso po dobu t padá, Země se pod ním pootočí o úhel $\alpha = \frac{2\pi}{T}t$ (T je doba rotace Země, tj. 1 den) a předmět tak dopadne o vzdálenost

$$d = \alpha R_Z \cos \varphi = \frac{2\pi}{T} t R_Z \cos \varphi$$

západněji od jeho původní přímé spojnice se středem Země (R_Z značí poloměr Země a φ zeměpisnou šířku daného místa). Dosadíme-li konkrétní číselné údaje (pro Brno $\varphi \doteq 49^\circ$) a zvolíme-li např. $t = 1$ s (tato doba odpovídá pádu předmětu z výšky $h \doteq 5$ m), vychází $d \doteq 300$ m! Popsaná argumentace je dnes již úsměvná, ve své době však způsobila, že možnost zemská rotace – a tím i heliocentrismus – musely být kategoricky odmítnuty.

Situace se změnila až poté, co Galileo Galilei formuloval *zákon setrvačnosti*: podle něj se volně puštěný předmět ve vodorovném směru pohybuje spolu s rotující Zemí (samozřejmě za předpokladu, že tíhové pole lze v oblasti pohybu předmětu považovat za homogenní) a ve svislém směru padá. K žádnému rozporu s pozorováním tudíž nedochází.

(b) Studium pohybů těles v tíhovém poli Země lze nejen prokázat zemskou rotaci, ale rovněž určit její rychlost a porovnat ji s hodnotou stanovenou z astronomických pozorování. Podstata metody vychází ze skutečnosti, že v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotující Zemí působí na pohybující se těleso kromě reálné gravitační síly a fiktivní síly setrvačné odstředivé (dohromady dávají sílu tíhovou) také fiktivní síla *Coriolisova*, která „zakřivuje jeho trajektorii“¹. Podrobný matematický popis pohybu tělesa vzhledem k Zemi je poměrně komplikovaný, proto se zde spokojíme pouze s následujícím jednoduchým odhadem:

Těleso umístěné ve výšce h nad povrchem Země má obvodovou rychlost $v_P = \frac{2\pi}{T} (R_Z + h) \cos \varphi$, kdežto obvodová rychlost zemského povrchu je $v_Z = \frac{2\pi}{T} R_Z \cos \varphi$, tj. $v_P > v_Z$. Zanedbáme-li odpor prostředí, urazí těleso během volného pádu vzhledem k Zemi ve *východním směru* vzdálenost

$$d' \doteq (v_P - v_Z) t = \left(\frac{2\pi}{T} h \cos \varphi \right) t = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{2h}{g}} h \cos \varphi,$$

kde g je tíhové zrychlení. V našich zeměpisných šířkách vychází např. pro $h = 100$ m hodnota $d' \doteq 2$ cm. Pro úplnost dodejme, že k detailnějšímu popisu je třeba také uvážit, že tíhová síla nesměruje přesně do středu Země, ale na severní polokouli poněkud jižněji, což se na trajektorii tělesa rovněž projeví. Východní odchylka padajících těles byla mnohokrát experimentálně prokázána, ale s poměrně malou přesností.

Podstatně známější důkaz rotace Země poskytuje tzv. Foucaultovo kyvadlo, což je těžké závaží zavěšené na velmi dlouhém lehkém vlákne (kyvadlo, které v roce 1851

¹viz Prémiová úloha 1. série Korespondenčního semináře

instaloval francouzský fyzik Jean Bernard Léon Foucault (1819 – 1868) v pařížském Pantheonu, bylo tvořeno koulí o hmotnosti 30 kg zavěšenou na ocelovém lanku délky 67 m). Výpočty ukazují, že z hlediska pozorovatele spojeného se Zemí se v důsledku působení Coriolisovy síly stáčí rovina malých kmitů Foucaultova kyvadla konstantní úhlovou rychlostí $\Omega \doteq \frac{2\pi}{T} \sin \varphi$. Tato rychlost je velmi dobře měřitelná – v našich zeměpisných šířkách činí odchylka roviny kmitů přibližně 11° za hodinu.