FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

7. ročník — 2000/2001

Vzorová řešení 1. série úloh

(25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (5 bodů)

Kladka

Pro bednu, která se pohybuje s daným zrychlením a vzhůru, platí pohybová rovnice

$$M_2 a = T_2 - M_2 g, \tag{1}$$

kde $\vec{T}_2$ je síla, kterou působí na bednu pravá část lana a $\vec{g}$ je tíhové zrychlení. Podle zákona akce a reakce působí bedna na lano silou $-\vec{T}_2$, jež se přenáší na obvod kladky. Podobně, napíná-li člověk levou část lana silou $-\vec{T}_1$, která se rovněž přenáší na obvod kladky, působí na něj lano silou $\vec{T}_1$ (viz obr. 1). Pohybová rovnice člověka, jemuž výslednice tíhové síly $M_1\vec{g}$ a tahové síly lana $\vec{T}_1$ udílí vzhledem k Zemi hledané zrychlení $\vec{a}_c$, má tvar

$$M_1 a_c = T_1 - M_1 g. \tag{2}$$

Zatím máme dvě rovnice (1) a (2) o třech neznámých a_c, T_1 a T_2. Třetí rovnicí, kterou potřebujeme zformulovat, abychom nalezli a_c, je pohybová rovnice otáčivého pohybu kladky kolem její osy

$$J\varepsilon = T_1 r - T_2 r,$$

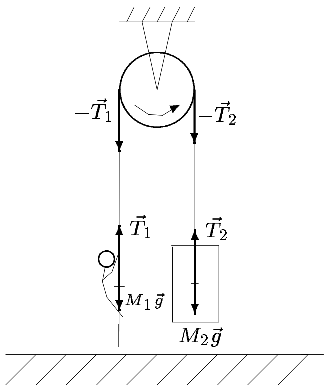
z níž po dosazení $J = \frac{1}{2}mr^2$ (moment setrvačnosti válcové kladky) a $\varepsilon = \frac{a}{r}$ (lano se po kladce nesmýká) dostaneme

$$\frac{1}{2}ma = T_1 - T_2. \tag{3}$$

Odečteme-li od rovnice (1) rovnici (2) a výsledek $M_2 a - M_1 a_c = T_2 - T_1 - (M_2 - M_1)\, g$ přičteme k rovnici (3), získáme po úpravě

$$a_c = \frac{(m + 2M_2)\, a + 2\,(M_2 - M_1)\, g}{2M_1}. \tag{4}$$

Aby se tedy bedna pohybovala s daným zrychlením a vzhůru, musí člověk šplhat po laně se zrychlením a_c daným vztahem (4).



Obr. 1

Vzorové řešení úlohy č. 2 (8 bodů)

Vozíčky

Zanedbáme-li tření, chová se soustava vozík + kladka + vozíčky jako izolovaná. Je zřejmé, že vozíček o hmotnosti M_1 se bude pohybovat vzhledem k vozíku i vzhledem k Zemi doprava, proto se podle zákona zachování hybnosti musí vozík vzhledem k Zemi pohybovat se zrychlením $\vec{A}$ doleva. Označme dále $\vec{a}'_1$, resp. $\vec{a}'_2$ zrychlení vozíčku o hmotnosti M_1, resp. M_2 vzhledem k vozíku.

Na vozíček o hmotnosti M_1 působí tíhová síla $M_1\vec{g}$, tahová síla vlákna $\vec{T}_1$, tlaková síla vozíku $\vec{N}_1$ a v neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíkem také setrvačná síla $\vec{F}^*_1 = -M_1\vec{A}$ (viz obr. 2). Pohybová rovnice tohoto vozíčku má ve vodorovném směru tvar

$$M_1 a'_1 = M_1 A + T_1. \tag{1}$$

Na vozíček o hmotnosti M_2 působí tíhová síla $M_2\vec{g}$, tahová síla vlákna $\vec{T}_2$ a v neinerciální vztažné soustavě spojené s vozíkem opět setrvačná síla $\vec{F}^*_2 = -M_2\vec{A}$. Napnuté vlákno má stálý směr výslednice tíhové a setrvačné síly. Pohybová rovnice vozíčku o hmotnosti M_2 formulovaná ve směru vlákna je

$$M_2 a'_2 = M_2\sqrt{g^2 + A^2} - T_2. \tag{2}$$

Považujeme-li vlákno za nepružné, je $a'_1 = a'_2 \equiv a'$.

Na obvodu kladky působí vlákno silami $-\vec{T}_1$ a $-\vec{T}_2$. Pohybová rovnice rotačního pohybu kladky kolem její osy je podobně jako v úloze č. 1

$$\frac{1}{2} m a' = T_2 - T_1. \tag{3}$$

Na vozík pevně spojený s kladkou působí tíhová síla $(m+M)\,\vec{g}$, tlaková síla prvního vozíčku $-\vec{N}_1$, tlaková síla podložky $\vec{N}_c$ (pro přehlednost nejsou tyto síly v obr. 2 zakresleny) a síly vlákna $-\vec{T}_1$ a $-\vec{T}_2$. Pohybová rovnice vozíku s kladkou má ve vodorovném směru tvar

$$(m+M)\,A = T_1 - T_2 \sin\alpha,$$

kde α označuje úhel sevřený vychýleným vláknem a svislicí. Podle obr. 2 je $\sin\alpha = \frac{A}{\sqrt{g^2+A^2}}$, takže pro vozík celkem platí

$$(m+M)\,A = T_1 - T_2 \frac{A}{\sqrt{g^2+A^2}}. \tag{4}$$

Máme čtyři rovnice (1), (2), (3) a (4) pro čtyři neznámé A, a', T_1 a T_2, z nichž potřebujeme určit A a a'. Proto z (1) vyjádříme $T_1 = M_1 a' - M_1 A$, z (2) $T_2 = M_2\sqrt{g^2+A^2} - M_2 a'$ a postupně dosadíme do (3) a (4). Dostaneme

$$\left(\frac{1}{2}m + M_1 + M_2\right) a' = M_1 A + M_2\sqrt{g^2+A^2} \tag{5}$$

a

$$(m + M + M_1 + M_2)\,A = M_1 a' + M_2 \frac{a' A}{\sqrt{g^2+A^2}}. \tag{6}$$

Z (5) vyjádříme

$$a' = \frac{M_1 A + M_2\sqrt{g^2+A^2}}{\frac{1}{2}m + M_1 + M_2} \tag{7}$$

a dosadíme do (6). Poněkud zdlouhavé, ale rutinní matematické úpravy nakonec přivedou ke kvadratické rovnici

$$\left[M_0^2 - (2M_1M_2)^2\right] x^2 + \left[M_0^2 - (2M_1M_2)^2\right] g^2 x - \left(M_1M_2g^2\right)^2 = 0,$$

v níž jsme pro přehlednost označili $M_0 = (m+M)\left(\frac{1}{2}m + M_1 + M_2\right) + \frac{1}{2}m\,(M_1+M_2) + 2M_1M_2$ a $x = A^2$. Její kořeny jsou

$$x_{1,2} = \frac{\pm M_0\sqrt{M_0^2 - (2M_1M_2)^2} - M_0^2 + (2M_1M_2)^2}{2\left[M_0^2 - (2M_1M_2)^2\right]} g^2.$$

V úvahu připadá pouze kladné řešení

$$A^2 = x_1 = \frac{M_0\sqrt{M_0^2 - (2M_1M_2)^2} - M_0^2 + (2M_1M_2)^2}{2\left[M_0^2 - (2M_1M_2)^2\right]} g^2,$$

tedy

$$A = g\sqrt{\frac{M_0\sqrt{M_0^2 - (2M_1M_2)^2} - M_0^2 + (2M_1M_2)^2}{2\left[M_0^2 - (2M_1M_2)^2\right]}}. \tag{8}$$

Dosazením výsledku (8) do (7) lze vyjádřit také zrychlení a' prostřednictvím zadaných veličin m, M, M_1, M_2 a g.

Vzhledem k Zemi pak má zrychlení vozíčku o hmotnosti M_1 pouze vodorovnou složku směřující doprava, její velikost je

$$a_1 = a_{1V} = a' - A.$$

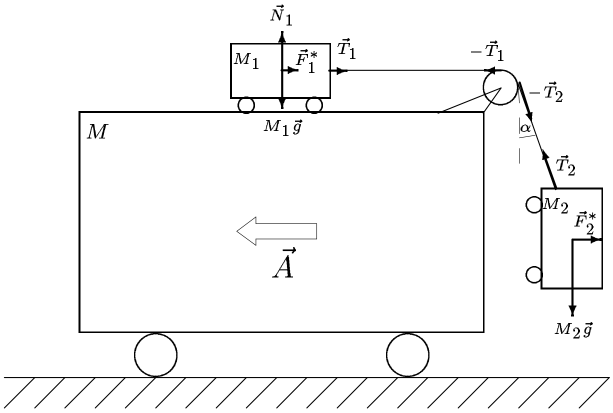
Zrychlení vozíčku o hmotnosti M_2 má vzhledem k Zemi vodorovnou složku směřující doleva o velikosti

$$a_{2V} = \frac{T_2}{M_2} \sin\alpha = \frac{T_2}{M_2} \frac{A}{\sqrt{g^2 + A^2}}$$

a svislou složku směřující dolů o velikosti

$$a_{2S} = g - \frac{T_2}{M_2} \cos\alpha = g - \frac{T_2}{M_2} \frac{g}{\sqrt{g^2 + A^2}},$$

kde za T_2 dosazujeme z (2).



Obr. 2

Vzorové řešení úlohy č. 3 (7 bodů)

Žebřík

Na žebřík působí celkem pět sil: v těžišti tíhová síla $\vec{F}_G = M\vec{g}$ (předpokládejme homogenní žebřík, takže těžiště leží v jeho polovině), tlaková síla člověka $\vec{N} = m\vec{g}$, tlaková síla podlahy $\vec{N}_P$, tlaková síla stěny $\vec{N}_S$, třecí síla podlahy $\vec{F}_{T_P}$ a třecí síla stěny $\vec{F}_{T_S}$ (viz obr. 3).

Pro žebřík v klidu mají síly $\vec{F}_{T_P}$ a $\vec{F}_{T_S}$ charakter sil statického tření a působí proti možnému pohybu. Současně je vektorový součet všech sil a vektorový součet momentů všech sil působících na žebřík (vzhledem k libovolné ose) nulový. Po rozepsání tedy máme podmínku silové rovnováhy

$$(m + M)\, g = N_P + F_{T_S}, \quad (1)$$

$$N_S = F_{T_P} \quad (2)$$

a podmínku momentové rovnováhy formulovanou např. vzhledem k vodorovné ose rovnoběžné se stěnou, procházející bodem O

$$Mg\frac{L}{2} \sin\alpha + mgl \sin\alpha = N_S L \cos\alpha + F_{T_S} L \sin\alpha. \quad (3)$$

Zatím máme tři rovnice pro pět neznámých l, N_P, N_S, F_{T_P} a F_{T_S}, proto je nutné doplnit soustavu ještě dvojicí nerovností pro velikosti statických třecích sil

$$\begin{aligned} F_{T_P} &\leq \mu_P N_P \qquad (4)\\ F_{T_S} &\leq \mu_S N_S \qquad (5) \end{aligned}$$

Hledanou hodnotu l určíme z (1) až (5) např. takto: Z rovnice (3) vyjádříme

$$l = \frac{L}{2mg}\left[2\left(N_S \mathrm{cotg}\alpha + F_{T_S}\right) - Mg\right],$$

po dosazení z (5) potom

$$l \leq \frac{L}{2mg}\left[2N_S\left(\mathrm{cotg}\alpha + \mu_S\right) - Mg\right]. \qquad (6)$$

Nyní již zbývá stanovit jen N_S. Z (2) a (4) vychází

$$N_S \leq \mu_P N_P, \qquad (7)$$

užitím (1) a (5) potom

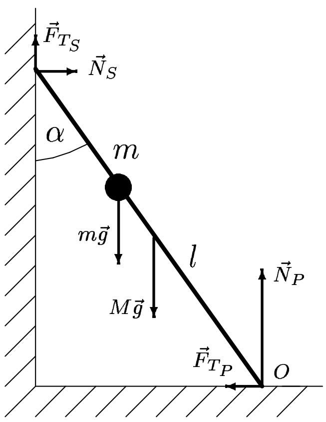
$$(m + M)\, g \leq N_P + \mu_S N_S. \qquad (8)$$

Ze soustavy nerovnic (7) a (8) získáme

$$N_S \leq \frac{\mu_P g\,(m + M)}{1 + \mu_P \mu_S}$$

a po dosazení do (6) celkem

$$l \leq \frac{L}{2m}\left[\frac{2\mu_P}{1 + \mu_P\mu_S}\,(m + M)\left(\mathrm{cotg}\alpha + \mu_S\right) - M\right].$$



Obr. 3

Vzorové řešení úlohy č. 4 (5 bodů)

Cívka

Kromě síly $\vec{F}$ působí na cívku v jejím těžišti tíhová síla $M_c\vec{g}$, kde $M_c = 2M + m$, v bodě dotyku s podložkou pak tlaková síla $\vec{N}$ a statická třecí síla $\vec{F_T}$ (viz obr. 4). Pohybová rovnice translačního pohybu těžiště cívky má tvar

$$M_c a = F\cos\alpha - F_T. \tag{1}$$

Pohybová rovnice rotačního pohybu cívky kolem vodorovné osy procházející jejím těžištěm je

$$J\varepsilon = F_T R - Fr,$$

po dosazení $J = \frac{1}{2}mr^2 + MR^2$ a $\varepsilon = \frac{a}{R}$ odtud máme

$$\frac{1}{2}ma\frac{r^2}{R} + MaR = F_T R - Fr. \tag{2}$$

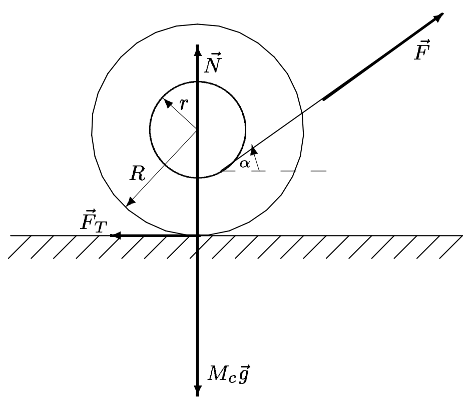
Vyjádříme-li z (1) $F_T = F\cos\alpha - M_c a$ a dosadíme do (2), dostaneme po úpravě

$$a = \frac{F\left(R\cos\alpha - r\right)}{m\left(R + \frac{r^2}{2R}\right) + 3MR}.$$

Odtud:

- Pro $R\cos\alpha > r$ je $a > 0$ a cívka se roztáčí doprava.
- Pro $R\cos\alpha = r$ je $a = 0$ a těžiště cívky je v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.
- Pro $R\cos\alpha < r$ je $a < 0$ a cívka se roztáčí doleva.

Všimněte si, že mezní případ $R\cos\alpha = r$ odpovídá situaci, kdy vektorová přímka síly $\vec{F}$ prochází dotykovou přímkou cívky a podložky – tzv. okamžitou osou rotace. Vzhledem k okamžité ose rotace mají v tomto případě všechny působící síly nulový moment a cívka je tedy buď v klidu nebo se rovnoměrně valí po podložce.



Obr. 4

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Obruč

Na obruč o hmotnosti m působí v těžišti tíhová síla $m\vec{g}$, v bodě dotyku s válcem pak tlaková síla $\vec{N}$ a třecí síla $\vec{F}_T$ (viz obr. 5). Okamžitou polohu obruče budeme popisovat úhlem φ, přičemž jistě stačí uvažovat pouze hodnoty $\varphi \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$. Pohybová rovnice translačního pohybu těžiště obruče má tvar:

- ve směru tečny k trajektorii

$$ma_t = mg \sin \varphi - F_T, \tag{1}$$

- ve směru normály k trajektorii

$$ma_n = mg \cos \varphi - N, \tag{2}$$

kde a_t a a_n značí velikost tečného a normálového zrychlení. Pohybová rovnice rotačního pohybu obruče kolem vodorovné osy procházející jejím těžištěm je

$$J\varepsilon = F_T r.$$

Dosadíme-li za moment setrvačnosti $J = mr^2$ a $\varepsilon = \frac{a_t}{r}$ (obruč se po povrchu válce valí bez klouzání), máme

$$ma_t = F_T. \tag{3}$$

Současně platí

$$F_T \leq \mu N, \tag{4}$$

takže užitím (1), (3) a (4) dostáváme

$$F_T = \frac{1}{2} mg \sin \varphi \leq \mu N \tag{5}$$

Velikost síly $\vec{N}$ určíme z (2), uvědomíme-li si, že pro normálové zrychlení platí $a_n = \frac{v^2}{R+r}$. Potom

$$N = mg \cos \varphi - m \frac{v^2}{R+r} \tag{6}$$

Rychlost v obruče v poloze popsané úhlem φ stanovíme ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 = mg \left(R + r \right) \left(1 - \cos \varphi \right).$$

Odtud $v^2 = g \left(R + r \right) \left(1 - \cos \varphi \right)$ a podle (6)

$$N = mg \left(2 \cos \varphi - 1 \right), \tag{7}$$

z (5) pak

$$\sin \varphi \leq 2\mu \left(2 \cos \varphi - 1 \right). \tag{8}$$

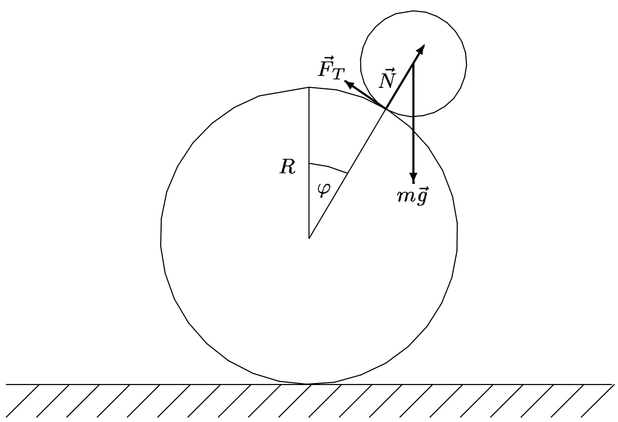
Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze hodnoty $\varphi \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, může být tato nerovnice splněna jen tehdy, když je její pravá strana nezáporná, tedy jen pro určitá φ vyhovující podmínce $\cos \varphi \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$ (tj. $\varphi \in \langle 0^\circ, 60^\circ \rangle$). Všimněte si, že potom také podle (7) platí $N \geq 0$, takže valící se obruč je stále v kontaktu s válcem.

Protože $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$, získáme po dosazení do (8), umocnění a vyřešení formální výsledek

$$\cos\varphi \in (-\infty, x_1\rangle \cup \langle x_2, \infty)\,,$$

kde $x_1 = \frac{8\mu^2-\sqrt{12\mu^2+1}}{16\mu^2+1}$, $x_2 = \frac{8\mu^2+\sqrt{12\mu^2+1}}{16\mu^2+1}$.

Obruč začíná po povrchu válce klouzat v případě, že v (8) platí znaménko rovnosti. Protože pro každé μ platí $x_2 \in \langle\frac{1}{2}, 1\rangle$, dojde k tomu v poloze φ_2, kde $\cos\varphi_2 = x_2$.



Obr. 5

Závěrečná poznámka:

Zaslaná řešení často postrádala alespoň stručný komentář vysvětlující Váš myšlenkový a následně početní postup. Protože takto zpracované úlohy není možné objektivně opravit, vystavují se jejich autoři nebezpečí zbytečných bodových ztrát.