

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

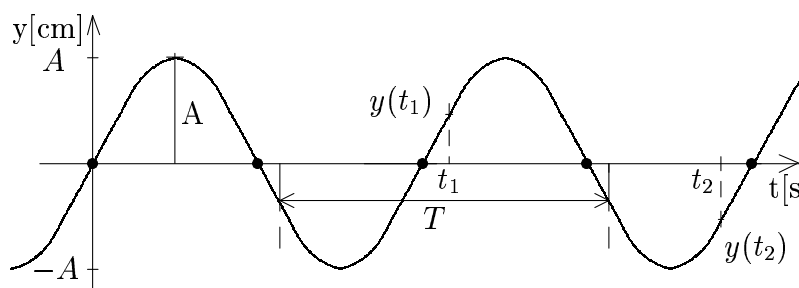
KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

7. ročník — 2000/2001

Vzorová řešení druhé série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (4 body)

Kmity kyvadla a čas



Obrázek 1

- a) Body, které odpovídají okamžikům, kdy se kyvadlo nachází v rovnovážné poloze, jsou na Obrázku 1 vyznačeny plnými kroužky. Přímka jimi proložená má význam časové osy, proto na ni nanášíme čas t v sekundách. Orientace časové osy je opačná než orientace směru posouvání papíru pod kyvadlem.
- b) Směr, v němž se mění výchylka y kyvadla, je kolmý na časovou osu (viz Obrázek 1).

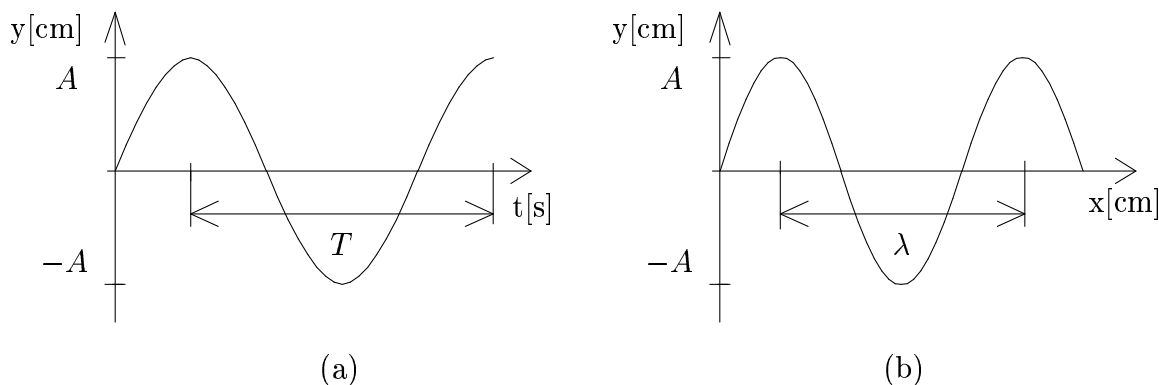
- c) Na Obrázku 1 je výchylka $y(t_1)$ kyvadla z rovnovážné polohy v okamžiku t_1 kladná ($y(t_1) > 0$), výchylka $y(t_2)$ kyvadla z rovnovážné polohy v okamžiku t_2 směřuje na opačnou stranu, proto je záporná ($y(t_2) < 0$). Amplituda je označena symbolem A .
- d) Jedna z možností, jak vyznačit periodu T , je uvedena na Obrázku 1. Frekvence f je definována jako počet kmitů za jednu sekundu, tedy $f = \frac{1}{T}$, její jednotkou je s^{-1} .
- e) Hledanou matematickou funkcí je funkce sinus, přičemž závislou proměnnou je výchylka y a nezávislou proměnnou čas t . Uvážíme-li, že funkce sinus má periodu 2π a kmitavý pohyb periodu T , dostáváme rovnici popisující závislost výchylky kmitavého pohybu na čase ve tvaru $y = A \sin(\frac{2\pi}{T}t)$.
- f) Nechť je perioda kmitavého pohybu kyvadla $T = 1,55$ s. Délka úsečky, která v Obrázku 1 odpovídá jedné periodě, je $u = 3,1$ cm. Protože pohyb papíru pod kyvadlem můžeme považovat za rovnoměrný, určíme rychlost posuvu papíru jako $\frac{u}{T} = 2,0$ cm.s⁻¹. Perioda T je tedy nakreslena v měřítku $T : u$, čili $1 \text{ cm} \hat{=} 0,5$ s. Aby byl obrázek v měřítku $1 \text{ cm} \hat{=} 1$ s, musela by být rychlost pohybu papíru 1 cm.s^{-1} .
- g) Experimentálně snadno zjistíme, že s délkou kyvadla l roste i perioda jeho kmitů T . Pro malé výchylky kyvadla z rovnovážné polohy (přibližně do 5°) přitom platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde g je tíhové zrychlení. Tento vztah lze získat například užitím rozměrové analýzy: rozměr konstanty $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ je m^{-½}s, proto musí být l obsaženo ve vztahu pro periodu pod odmocninou.
- h) Dvojitý závěs zaručuje nejen stabilitu sypátka, ale i to, že kmitání kyvadla probíhá v jedné rovině.

Vzorové řešení úlohy č. 2 (6 bodů)

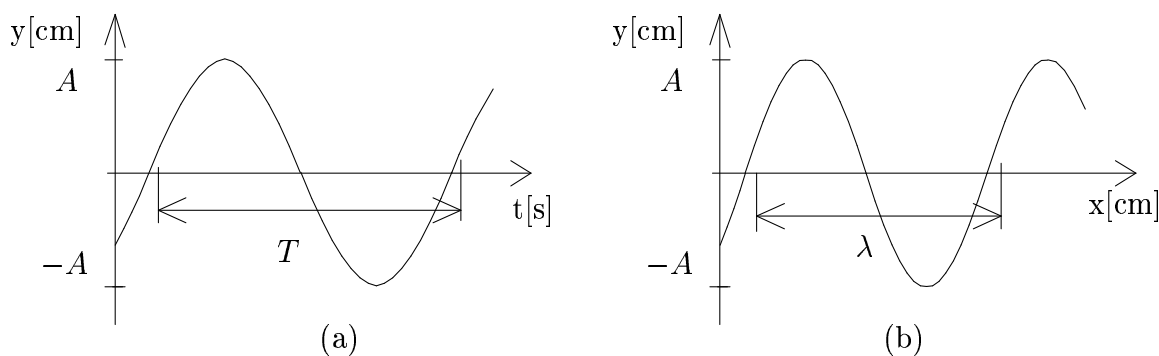
Kmity a vlny – rozdíly a souvislosti

- a) Začínáme-li měřit čas při průchodu levého krajního kyvadla rovnovážnou polohou a předpokládáme-li, že se kyvadlo bude po opuštění této polohy pohybovat v kladném směru osy y , je závislost jeho výchylky na čase dána vztahem $y = A \sin(\frac{2\pi}{T}t)$. Spojovací nit slouží k přenosu kmitavého pohybu do řady kyvadel, má tedy funkci vazby.
- b) Amplitudu A a periodu T vlnění zavádíme jako amplitudu a periodu kmitavého pohybu, který koná libovolný bod prostředí, v němž se vlnění šíří. Časový rozvoj kmitů zvoleného kyvadla je zakreslen na Obrázku 2(a). Vlnová délka je vzdálenost, do které dospěje vlnění za jednu periodu, platí tedy vztah $\lambda = vT$, kde v je rychlost šíření vlnění. Obrázek 2(b) – graf závislosti výchylky jednotlivých

kyvadel na vzdálenosti od počátku soustavy souřadnic – vlastně znázorňuje „fotografii“ vlny v daném časovém okamžiku. Zakreslení obou těchto obrázků přitom nemusí být jednoznačné: Záleží na okamžiku, v němž začneme měřit čas a v němž pořídíme „fotografii“ vlny. Obrázek 3 se liší od Obrázku 2 pouze výběrem počátečního časového okamžiku t_0 .



Obrázek 2



Obrázek 3

- c) Necht' je pohyb levého krajního kyvadla popsán rovnicí $y_L = A \sin(\frac{2\pi}{T}t)$. Vlnění, které se šíří v daném prostředí rychlostí v v kladném směru osy x , dospěje ke zvolenému kyvadlu za dobu $\tau = \frac{x}{v}$, kde x je vzdálenost zvoleného kyvadla od levého krajního kyvadla. Zvolené kyvadlo bude mít proto stejnou výchylku jako levé krajní kyvadlo o dobu τ později. Pro výchylku zvoleného kyvadla v čase t tedy platí

$$y_x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - \tau)\right) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right),$$

což je hledaná rovnice vlnění.

Pokud se vlnění šíří od pravého kyvadla, tj. v záporném směru osy x , dospěje k zvolenému kyvadlu za čas $\tau' = -\frac{x}{v}$ (znaménko minus vyjadřuje skutečnost, že x -ová souřadnice zvoleného kyvadla je záporná). Pro výchylku zvoleného kyvadla v čase t tedy platí

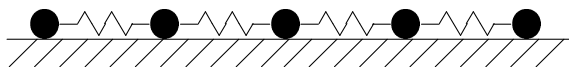
$$y_x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t - \tau')\right) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v}\right)\right).$$

- d) Perioda T , amplituda A a vlnová délka λ je zaváděna pro podélné i příčné vlnění stejným způsobem. Stejný formální tvar mají i rovnice obou vlnění. Abychom zdůraznili skutečnost, že výchylka podélného vlnění se mění ve směru šíření, tj. podél osy x , budeme ji označovat jiným symbolem, například ξ_x . Potom je rovnice podélného vlnění dána vztahem

$$\xi_x = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \right),$$

přičemž význam symbolů A , T , v a x zůstává stejný jako dříve.

Příkladem zařízení, s jehož pomocí je možné demonstrovat šíření podélného vlnění, je řada kuliček spojených pružinami (viz Obrázek 4).



Obrázek 4

Vzorové řešení úlohy č. 3 (7 bodů)

Rázy

- a) Předpokládejme, že jsme oba zdroje rozezvučeli ve stejném okamžiku. Rovnici podélného vlnění, které se šíří ze zdroje 1 rychlostí v v kladném směru osy x a má frekvenci $f_1 = \frac{1}{T_1}$ a amplitudu A , lze užitím výsledků předchozí úlohy zapsat ve tvaru

$$\xi_{x1} = A \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{vT_1} \right) \right) = A \sin \left(2\pi \left(f_1 t - \frac{x}{\lambda_1} \right) \right),$$

kde $\lambda_1 = vT_1$ je vlnová délka tohoto vlnění. Podobně je rovnice vlnění, které má vlnovou délku λ_2 a šíří se rychlostí v v kladném směru osy x ze zdroje 2, kmitajícího s frekvencí f_2 a amplitudou A ,

$$\xi_{x2} = A \sin \left(2\pi \left(f_2 t - \frac{x}{\lambda_2} \right) \right).$$

Změnu frekvence f_1 ladičky na hodnotu $f_2 \neq f_1$ lze dosáhnout například omotáním jednoho ramene ladičky drátem.

Bod prostředí ve vzdálenosti x od zdrojů zvuku, ve kterém detekujeme obě vlnění, koná kmitavý pohyb. Rovnice tohoto kmitavého pohybu získáme z předchozích vztahů pro vlnění tak, že si pevně zvolíme hodnotu $x = konst$ (položme pro jednoduchost $x = 0$ m). Nyní musíme podle principu superpozice obě získané funkce sečíst: $\xi_{xv} = \xi_{x1} + \xi_{x2} = A \sin(2\pi f_1 t) + A \sin(2\pi f_2 t)$. Tento součet upravíme pomocí vztahu $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ na součin dvou funkcí. Použitím označení $f_2 = f_1(1 + e)$ dostaneme výsledek

$$\xi_{xv} = 2A \sin \left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t \right) \cos \left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \right) = 2A \cos \left(2\pi f_1 \frac{e}{2} t \right) \sin \left(2\pi f_1 \left(1 + \frac{e}{2} \right) t \right).$$

- b) Získaný časový rozvoj lze chápat jako kmitavý pohyb s časově proměnnou amplitudou $A' = 2A \cos\left(2\pi f_1 \frac{e}{2} t\right)$. Dvojice funkcí $A' = 2A \cos\left(2\pi f_1 \frac{e}{2} t\right)$ a $A'' = -A'$ omezuje rovinu na oblast, v níž se mění funkce $f = A' \sin\left(2\pi f_1 \left(1 + \frac{e}{2}\right) t\right)$. Na Obrázku 5 jsou zakresleny tři periody získaného kmitání pro hodnoty $f_1 = 200 \text{ s}^{-1}$ a $e = 0, 1$.

Obrázek 5

- c) Jednoduchým tónem rozumíme zvuk, který má harmonický průběh (například tón ladičky), tónem složeným zvuk s periodickým průběhem (například hlásk „a“). Jak je vidět z předchozího obrázku, je získaný zvuk tónem složeným.

Vzorové řešení úlohy č. 4 (8 bodů)

Určení frekvence zdroje zvuku

- a) Zvolme si soustavu souřadnic tak, že osa x směřuje svisle vzhůru a počátek soustavy souřadnic se nachází na vodní hladině (viz Obrázek 6 (a)). Předpokládejme, že dopadající vlna má frekvenci f a amplitudu A . Protože se tato vlna šíří v záporném směru osy x rychlostí o velikosti v , má rovnici

$$\xi_{x1} = A \sin\left(2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)\right),$$

kde λ je vlnová délka vlnění. Odražená vlna má stejnou frekvenci, amplitudu a vlnovou délku jako vlna dopadající a šíří se v kladném směru osy x rychlostí v tak, že pro její výchylku v bodě $x = 0 \text{ m}$ (bod odrazu) platí podmínka $\xi_{02} = -\xi_{01}$. Odražené vlnění je proto popsáno rovnicí

$$\xi_{x2} = -A \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

- b) Dopadající a odražené vlnění složíme podle principu superpozice a upravíme pomocí vzorce $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$ do tvaru

$$\xi_{xv} = 2A \cos(2\pi ft) \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

- c) Polohu jednotlivých uzlů určuje podmínka $\xi_{xv} = 0$ pro libovolné t , a tedy $\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$. Vyřešením této rovnice dostáváme $\frac{2\pi x}{\lambda} = m\pi$, kde $m = 0, 1, 2, \dots$, čili pro polohu uzlů stojatého vlnění platí

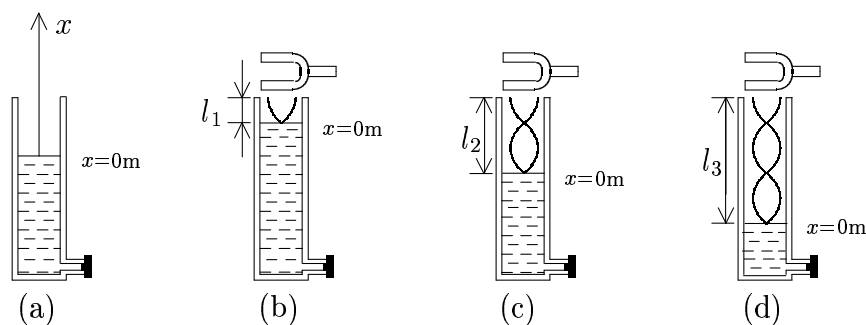
$$x = 2m \frac{\lambda}{4}, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \dots$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že v bodě odrazu se opravdu nachází uzel.

Podmínka pro polohu kmiten $\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \pm 1$ (velikost výchylky ξ_{xv} v daném místě může být maximální) dává $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2m - 1)\frac{\pi}{2}$, kde $m = 1, 2, 3, \dots$, odtud pro polohu kmiten stojatého vlnění platí

$$x = (2m - 1) \frac{\lambda}{4}, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \dots$$

- d) Rozložení uzlů a kmiten ve válci je vidět z Obrázku 6 (obrázek je kreslen tak, jako by se jednalo o vlnění příčné). Na vodní hladině, která je bodem odrazu, se vždy nachází uzel. Aby došlo k zesílení zvuku, musí být na otevřeném konci válce kmitna.



Obrázek 6

- e) Pro první zesílení zřejmě podle Obrázku 6 nebo ze vztahu pro polohu kmiten platí $l_1 = \frac{\lambda}{4}$, pro druhé zesílení $l_2 = \frac{3\lambda}{4}$ a pro třetí zesílení $l_3 = \frac{5\lambda}{4}$. Pro m -té zesílení najdeme $l_m = (2m - 1) \frac{\lambda}{4}$, kde $m = 1, 2, 3, \dots$. Protože platí $\lambda = \frac{v}{f}$, dostáváme pro frekvenci ladičky vztah

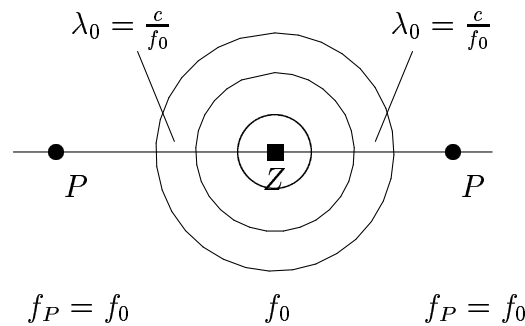
$$f = \frac{(2m - 1)v}{4l_m}, \quad \text{kde } m = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

přičemž rychlost v zvuku ve vzduchu při teplotě 20° je podle matematicko-fyzikálních tabulek $v = 343 \text{ m.s}^{-1}$.

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Dopplerův jev

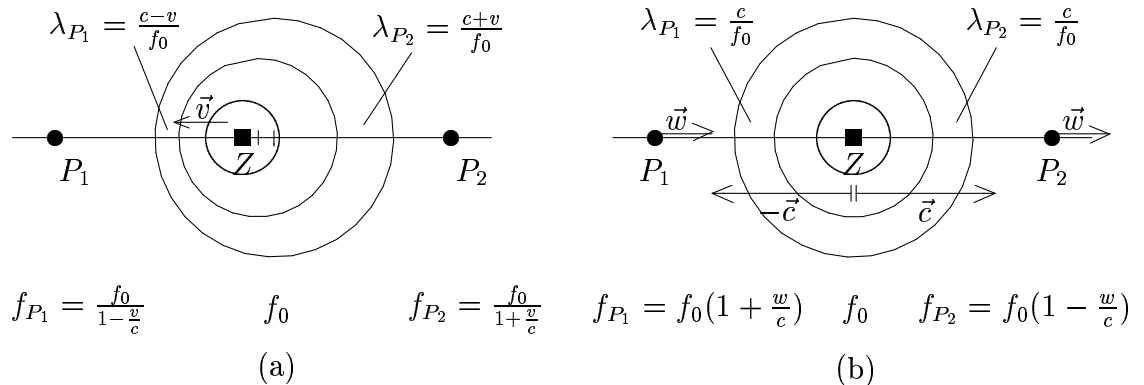
- a) Nechť zdroj v klidu vysílá zvuk o frekvenci f_0 . Tento zvuk se šíří stejnorodým prostředím rychlostí o velikosti c , takže pro jeho vlnovou délku zřejmě platí $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$. Pozorovatel, který je vůči zdroji v klidu, vnímá tutěž frekvenci $f_P = f_0$ (viz Obrázek 7.) Kružnice na následujících obrázcích vždy znázorňují množiny bodů, do nichž vlnění dospěje za jednu periodu.



Obrázek 7

Pokud se zdroj blíží k pozorovateli P_1 rychlostí o velikosti v (viz Obrázek 8 (a)), vnímá pozorovatel vlnění kratší vlnové délky $\lambda_{P_1} = \frac{(c-v)}{f_0}$ a tudíž vyšší frekvence $f_{P_1} = \frac{c}{\lambda_{P_1}} = f_0 \frac{1}{1-\frac{v}{c}}$ než pozorovatel P , který je vůči zdroji v klidu. Pozorovatel P_2 , vůči němuž se zdroj vzdaluje rychlostí o velikosti v , registruje vlnění větší vlnové délky $\lambda_{P_2} = \frac{(c+v)}{f_0}$ a tím i nižší frekvence $f_{P_2} = \frac{c}{\lambda_{P_2}} = f_0 \frac{1}{1+\frac{v}{c}}$.

- b) Pokud se pozorovatel P_1 přibližuje ke zdroji rychlostí o velikosti w , šíří se vůči němu vlnění rychlostí o velikosti $v_{P_1} = c + w$ (viz Obrázek 8 (b)).



Obrázek 8

Pro frekvenci jím přijímaného signálu pak platí $f_{P_1} = \frac{v_{P_1}}{\lambda} = \frac{c+w}{\frac{c}{f_0}} = \left(1 + \frac{w}{c}\right) f_0$. Tato situace tedy není analogická situaci, kdy se zdroj blíží k pozorovateli. Pokud se pozorovatel P_2 vzdaluje od zdroje rychlostí o velikosti w , šíří se vůči němu vlnění rychlostí o velikosti $v_{P_2} = c - w$ a pro jím přijímanou frekvenci platí $f_{P_2} = \frac{v_{P_2}}{\lambda} = \frac{c-w}{\frac{c}{f_0}} = \left(1 - \frac{w}{c}\right) f_0$.