

# FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

---

## KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

7. ročník — 2000/2001

### Vzorová řešení třetí série úloh (25 bodů)

#### Vzorové řešení úlohy č. 1 (6 bodů)

##### Směrový problém

Filozof by se na daný problém mohl dívat tak, že má pokus a v něm jeden významný směr, a to směr rychlosti kuličky. Jaký jiný směr by mohl být dostatečně významný pro to, aby se v něm kulička dále pohybovala? Fyzikovi však taková filozofická úvaha stačit nemůže. Může si zkusit udělat experiment. Zjistí, že poté co kulička vjede na točnu, začne se chovat velmi zmateně – a velmi pravděpodobně se zalekne možnosti pohyb kuličky na točně matematicky popsat.

Zamysleme se tedy nad problémem alespoň kvalitativně. V bodě kontaktu s podložkou působí na kuličku třecí síla, která je v případě, že kulička nepodkluzuje, třecí silou statickou. Velikost statické třecí síly splňuje v každém časovém okamžiku  $t$  podmínku

$$F(t) \leq mgf_0,$$

kde  $m$  je hmotnost kuličky,  $g$  je tíhové zrychlení a  $f_0$  je koeficient statického tření mezi kuličkou a podložkou<sup>1</sup>. Podle zákona akce a reakce pak působí kulička na podložku stejně velkou, ale opačně orientovanou třecí silou.

---

<sup>1</sup>Pro úplnost poznamenejme, že výpočet konkrétní hodnoty třecí síly z uvedeného intervalu je v každém časovém okamžiku proveditelný, ale přesahuje středoškolský rámec.

Třetí sílu, již působí kulička na točnu, můžeme v každém okamžiku rozložit do složky  $\vec{F}_1$  kolmé na spojnicí "střed kuličky – střed točny" a do složky  $\vec{F}_2$  ve směru spojnice "střed kuličky – střed točny". Zatímco složka  $\vec{F}_1$  urychluje nebo brzdí otáčivý pohyb točny, složka  $\vec{F}_2$  musí být vzhledem k tomu, že střed točny nemění v prostoru svoji polohu, kompenzována stejně velikou vnější silou  $-\vec{F}_2$  působící v ložiscích. Vidíme tedy, že soustava "kulička – točna" NENÍ IZOLOVANÁ, což znemožňuje použít k řešení úlohy zákon zachování hybnosti. K obecnému určení směru, v němž kulička opouští točnu, proto nezbyvá než přistoupit k poměrně komplikovanému výpočtu trajektorie kuličky na točně.

V určitém (a dokonce poměrně běžném) případě však toto úskalí můžeme velmi snadno obejít. Víme totiž, že celková změna hybnosti soustavy "kulička – točna" je (vzhledem k Zemi) dána vztahem

$$\Delta \vec{p} \doteq \sum_{i=1}^N \vec{F}^{ext}(t_i) (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^N -\vec{F}_2(t_i) (t_i - t_{i-1}),$$

v němž  $\vec{F}^{ext}(t_i)$  je výslednice vnějších sil působících na soustavu "kulička – točna" v časovém okamžiku  $t_i$  a  $t_N - t_0 = \Delta t$  je celková doba pohybu kuličky po točně. Dodejme, že uvedený vztah platí tím přesněji, čím jemněji dobu pohybu kuličky na točně rozdělíme na jednotlivé intervaly  $[t_{i-1}, t_i]$ . Pro lehkou kuličku ale budou velikosti statických třecích sil a tím i velikosti vnějších sil  $-\vec{F}_2(t)$  malé. Podobně, bude-li se kulička před nájezdem na točnu pohybovat rychle a točna bude mít malý poloměr, stráví kulička na točně pouze krátký časový interval  $\Delta t$ . Celková změna hybnosti  $\Delta \vec{p}$  soustavy "kulička – točna" je potom podle výše uvedeného vztahu malá. Uvědomíme-li si navíc, že celková hybnost soustavy "kulička – točna" je dána pouze hybností kuličky (rozmyslete si proč!) a tato hybnost je pro rychle se pohybující kuličku velká, je  $\Delta \vec{p}$  oproti původní hybnosti kuličky před vjezdem na točnou zanedbatelná a kulička se tak bude po opuštění točny pohybovat téměř v původním směru.

Poznámka:

Všimněte si, že jsme do našich úvah nezahrnovali síly působící na kuličku a na točnu ve svislém směru. Projeví se tato skutečnost ve výsledku?

## Vzorové řešení úlohy č. 2 (6 bodů)

### Hmotnostní anomálie?

Zkusme si nejprve rozmyslet, jaké síly působí na těleso ve vztažné soustavě spojené se Zemí. Určitě na ně působí gravitační síla Země  $\vec{F}_{gz}$  a gravitační síla Slunce  $\vec{F}_{gs}$ . Dále nás jistě nepřekvapí, že na ně působí i síla setrvačná odstředivá  $\vec{F}_{oz}$  spojená s rotací Země kolem své osy. Ale působí na ně i setrvačná odstředivá síla  $\vec{F}_{os}$  spojená s pohybem Země kolem Slunce (pro jednoduchost zde předpokládáme, že Země se kolem Slunce pohybuje po kružnici). Je vhodné zdůraznit, že síla  $\vec{F}_{os}$  je dána translačním pohybem Země jako celku kolem Slunce, a proto má – na rozdíl od ostatních uvažovaných sil  $\vec{F}_{gz}$ ,  $\vec{F}_{gs}$  a  $\vec{F}_{oz}$  – ve všech místech zemského povrchu stejný směr i stejnou velikost.

Polední tíha tělesa o hmotnosti  $m$  umístěného na rovníku je pak

$$G_1 = F_{gz} - F_{oz} - F_{gs_1} + F_{os},$$

podobně je pólnoční tíha téhož tělesa

$$G_2 = F_{gz} - F_{oz} + F_{gs_2} - F_{os}.$$

(Všimněte si, že jsme zde vyznačili skutečnost, že gravitační síla Slunce má v poledne a o pólnoči jinou velikost.) Odečtením posledních dvou vztahů dostáváme pro rozdíl pólnoční a polední tíhy téhož tělesa

$$\Delta G = G_2 - G_1 = F_{gs_1} + F_{gs_2} - 2F_{os}.$$

Dosadíme-li známé vztahy

$$F_{gs_1} = \kappa \frac{mM_s}{(r_{zs} - R_z)^2}, \quad F_{gs_2} = \kappa \frac{mM_s}{(r_{zs} + R_z)^2}, \quad F_{os} = \kappa \frac{mM_s}{r_{zs}^2},$$

kde  $\kappa$  je gravitační konstanta,  $M_s$  je hmotnost Slunce,  $r_{zs}$  je vzdálenost Země od Slunce a  $R_z$  je poloměr Země, dostáváme výsledek

$$\Delta G = \kappa m M_s \left( \frac{1}{(r_{zs} - R_z)^2} + \frac{1}{(r_{zs} + R_z)^2} - \frac{2}{r_{zs}^2} \right).$$

Protože platí  $R_z \ll r_{zs}$ , je  $\Delta G \approx 0$ . Pokud by někdo přece jen chtěl výraz pro  $\Delta G$  konkrétně vyčíslit, musí si uvědomit, že bude odečítat dvě velmi blízká čísla a výsledek je tedy velmi blízký nule. Každá z dosazovaných veličin ( $\kappa$ ,  $M_s$ ,  $r_{zs}$  a  $R_z$ ) je ovšem zjišťována experimentálně a tudíž s určitou chybou. Relativní chyba vypočtená pro  $\Delta G$  by potom mohla být i velmi vysoká.

Poznámka:

Během výpočtu jsme – podle požadavku v zadání – neuvažovali vliv Měsíce, který se na tíze tělesa rovněž projevuje.

## Vzorové řešení úlohy č. 3 (8 bodů)

### Plachetnice

Jak stavět a jak řídit plachetnice – to bylo ve středověku a raném novověku dobře střeženým tajemstvím loďařů, admirálů a pirátů<sup>2</sup>. Mě tato problematika po fyzikální stránce zaujala, a proto bych vám chtěl ukázat trochu víc než jen řešení zadané úlohy.

Loď jako fyzikální systém je ovlivňována dvěma prostředími: vodou a vzduchem. Proč se na vodě udržel vysvětlil již Archimédes. Jak zařídit, aby byla loď stabilní

---

<sup>2</sup>Tomu, koho by toto odvětví lidské činnosti blíže zajímalo, doporučuji Muzeum lodní techniky v Paříži.

i za vlnobití, je problémem statiky: každého fyzika jistě napadne stabilitu zajistit "nízkým těžištěm" (jinou možností je spojit dva trupy a máme katamarán). Pak určitě chceme, aby naše loď byla rychlá. Proto ji vytvarujeme "hydrodynamicky". Postavíme ji štíhlou. Tady se dlouho naráželo na konstrukční problémy, neboť úzká loď musí být dlouhá, aby uvezla potřebný náklad, jenže na dlouhou loď potřebujeme dlouhé trámy, a ty se špatně shánějí (použijeme-li krátké, bude mít loď malou pevnost).

Tvar lodního trupu a z něj vyplývající vlastnosti jsou pro řešení úlohy prvním zajímavým bodem. Na loď budou působit mnohem menší odporové síly při pohybu ve směru před – zad (tomuto směru budu pracovně říkat osa lodi), než kdybychom chtěli, aby se loď pohybovala kolmo na osu. Pro naše potřeby bude dostatečný následující model: loď se může vzhledem k vodě pohybovat pouze ve směru své osy, přičemž stáčení osy je možné zařídit kormidlem.

V celém řešení se budu vyhýbat kvantifikacím odporových sil a měl bych jistě vysvětlit proč. Fyzika je zde totiž velmi nejistá. Velmi dobrý a teoreticky podložený je Stokesův vzorec

$$F = 6\pi\eta r v,$$

kde  $r$  je poloměr tělesa,  $\eta$  je dynamická viskozita prostředí a  $v$  je rychlost tělesa vzhledem k prostředí. Použití Stokesova vzorce je však velmi omezené, neboť platí pouze pro kulová tělesa a jen při laminárním proudění. Dále máme Newtonův vztah

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2,$$

kde  $S$  je plocha průřezu tělesa kolmého na rychlost,  $\rho$  je hustota prostředí a  $C$  je konstanta zohledňující tvar tělesa. Tenhle model odporových sil má mnohem širší využití, ale také jisté vady na kráse. Především většinou teoreticky neznáme konstantu  $C$  pro tvar, který nás zajímá, a proto ji musíme určovat experimentálně<sup>3</sup>. Navíc Newtonův vztah umožňuje určit pouze velikost odporové síly, ale neříká nic o jejím směru.

Pohony lodí – vesla, kola parníků i lodní šrouby – o nich by bylo možné napsat rozsáhlá pojednání. Nás ale zajímají plachty. Dlouho se používaly klasické plachty – velké čtvercovité kusy látky natažené na ráhně, které bylo ke stěžni upevněno kolmo k ose lodi. Časem se pak objevily tzv. latinské plachty a jejich varianty. Šlo o plachty trojúhelníkového tvaru na šikmém ráhně, jejichž rovina se mohla vzhledem k ose lodi natáčet. Zdokonalování oplachtění pak vedlo k opravdu složitým systémům kosatek, košovek, vratiplachet a ... (vyjmenovávat názvy by nemělo smysl), které maximálně využívaly větru k pohonu lodi. Lanoví, které to všechno drželo pohromadě, bylo pro projektanty dalším problémem.

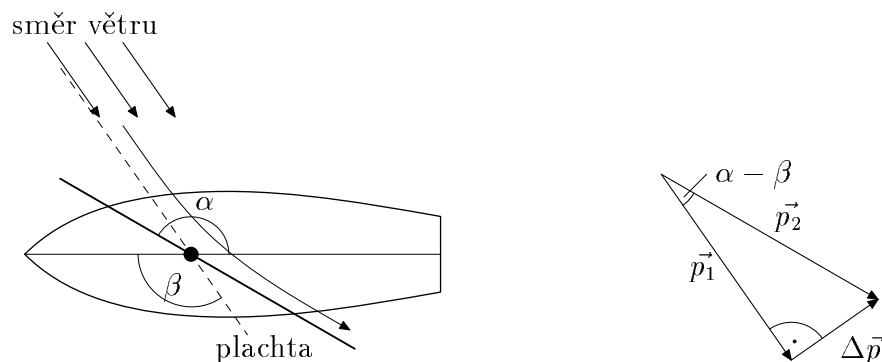
Aby mohla loď křížovat proti větru, musí být vybavena plachtou, která se může otáčet kolem stěžně. Jako fyzikální model plachty nám postačí část roviny (na tvaru plachty už tolik nezáleží), která může měnit úhel, jenž svírá s osou lodi. Tento úhel označme  $\alpha$  (viz obrázek). Je-li  $\alpha = 0^\circ$  nebo  $\alpha = 180^\circ$ , je plachta rovnoběžná s osou lodi. Vítr nechť fouká ve směru svírajícím s osou lodi úhel  $\beta$ . Jak to tedy všechno funguje? Když nastavíme plachtu do polohy rovnoběžné se směrem větru ( $\alpha = \beta$ ), nebude se do ní chytat žádný vzduch a vítr tak na loď téměř nebude působit. Změníme-li polohu plachty tak, že  $\alpha - \beta \neq 0$ , začne s větrem interagovat. Vzduch, který narazí na plachtu,

---

<sup>3</sup>Zájemce bych odkázal na některé publikace týkající se aerodynamiky (např. publikace určené modelářům). Pro ideálně tvarovaná křídla bývá  $C$  menší než 0,1, pro běžná tělesa jsem se nesetkal s údajem vyšším než 10.

nemůže pokračovat ve svém původním směru pohybu, ale musí se odklonit tak, že se dál bude pohybovat podél plachty. Je zřejmé, že plachta tak změnila hybnost vzduchu, a proto na něj musela působit silou ve směru změny jeho hybnosti. Podle zákona akce a reakce působí vzduch na plachtu stejně velkou, ale opačně orientovanou silou. Navíc tato síla není k ose lodi kolmá, takže může loď uvést do pohybu. (Podobně fungují třeba lopatky větrných mlýnů nebo vrtule letadel.)

Pokusme se odhadnout velikost této síly. Abychom obešli všechny odporové vztahy, použijeme druhého Newtonova zákona: "změna vektoru hybnosti připadající na velmi krátký časový interval je rovna výsledné působící síle". Známe hybnost (směr i velikost) vzduchu před interakcí s plachtou. Pro účely vytvoření modelu řekněme, že všechny vzduch, který se s plachtou potká, bude odchýlen tak, že jeho konečná hybnost bude mít směr plachty. Teď musíme ještě odhadnout velikost konečné hybnosti. Jeden z možných předpokladů je, že velikost hybnosti zůstane nezměněna<sup>4</sup>. My však zde použijeme jednodušší odhad: řekněme že změna hybnosti vzduchu bude kolmá na plachtu. Předpokládáme-li, že je  $\alpha - \beta$  malé, dají oba odhady téměř stejné hodnoty velikosti konečné hybnosti.



Z obrázků je zřejmé, že

$$\Delta p = p \sin(\alpha - \beta) = \Delta m v \sin(\alpha - \beta),$$

kde  $\Delta m$  představuje hmotnost vzduchu, který byl plachtou odkloněn za čas  $\Delta t$ , tj.

$$\Delta m = \rho S_u v \Delta t,$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu (předpokládáme, že je konstantní) a  $S_u = S \sin(\alpha - \beta)$  je tzv. účinný průřez plachty. Podle druhého Newtonova zákona je velikost síly působící na loď  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ . Protože (v našem modelu) voda umožňuje pohyb pouze ve směru osy, bude mít na pohyb lodi vliv pouze průmět síly do tohoto směru. S využitím předchozích vztahů získáme pro velikost průmětu síly do směru osy lodi vzorec

$$F_p = \rho S v^2 \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \beta) = \rho S v^2 \sin \alpha \sin^2(\alpha - \beta).$$

Tady končí obecné odvozování. Ještě jednou okomentuji goniometrické funkce, které se ve výsledku vyskytly. Jeden  $\sin(\alpha - \beta)$  pochází od změny hybnosti vzduchu. Druhý  $\sin(\alpha - \beta)$  se vyskytl ve vztahu pro účinnou plochu plachty a vystihuje, jaká část

<sup>4</sup>Protože nelze přesně zjistit, jak se bude hybnost měnit, bez vhodných předpokladů se zde neobejdeme.

vzduchu se s plachtou potkala. A nakonec  $\sin \alpha$  je ve vztahu proto, že na pohyb lodi bude mít vliv pouze průmět výsledné síly do směru lodi.

Diskuse výsledku:

- Chceme zjistit nejvhodnější úhel plachty při zadaném směru větru. To znamená najít takové  $\alpha$ , při kterém nabývá maxima součin goniometrických funkcí ve výrazu pro sílu. (Další podmínka je  $\alpha > \beta$ , aby loď plula správným směrem.) Tenhle problém můžeme řešit numericky, například použitím vhodného programu. Pro  $\beta = 90^\circ$  získáme maximální sílu při  $\alpha \doteq 144^\circ$ . Velikost síly bude

$$F_p = 0,38 \cdot \varrho S v^2.$$

Při zadané ploše plachty a rychlosti větru s dosazením hodnoty  $\varrho \doteq 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$  je hledaná velikost síly  $F_p \doteq 1000 \text{ N}$ . Číslo 0,38 je maximální hodnota součinu goniometrických funkcí v obecném výrazu pro sílu za předpokladu, že  $\beta = 90^\circ$ . Pro  $\beta = 120^\circ$  tato maximální hodnota klesá na 0,14 a pro  $\beta = 140^\circ$  klesá pod 0,05. To je již dost málo a tak ostře proti větru by každý rozumný kapitán odmítl plout.

- Veškeré úvahy, které vedly k odhadu síly, byly dělány pro stojící loď. Když se loď bude pohybovat, bude (vzhledem ke skládání rychlostí) i jiný úhel  $\beta$ . Spočítat tento úhel pro loď pohybující se určitou rychlostí by pro vás neměl být problém.

## Vzorové řešení úlohy č. 4 (5 bodů)

### Vodní proud

Tento problém každý jistě poznal když – ležící ve vaně – pozoroval vodu vytékající z kohoutku. Vodní proud se pěkně zužuje...

Při výpočtu parametrů vodního proudu budeme předpokládat, že voda je ideální kapalinou, jejíž proudění lze považovat za laminární. Rovnice kontinuity má potom tvar

$$S_0 v_0 = S v,$$

kde  $S_0$  (resp.  $S$ ) je plocha kolmého průřezu vodního proudu při ústí kohoutku (resp. ve vzdálenosti  $h$  od ústí kohoutku) a  $v_0$  (resp.  $v$ ) je rychlost vodního proudu při ústí kohoutku (resp. ve vzdálenosti  $h$  od ústí kohoutku). Předpokládáme-li kruhový průřez vodního proudu, zapíšeme při označení příslušných poloměrů  $r_0$  (resp.  $r$ ) rovnici kontinuity ve tvaru

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2 v.$$

Neznámou rychlost  $v$  určíme ze zákona zachování mechanické energie pro objemovou jednotku vody (Bernoulliho rovnice):

$$\frac{1}{2} \varrho v^2 = \frac{1}{2} \varrho v_0^2 + \varrho g h \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnice kontinuity, dostáváme po úpravě závislost poloměru vodního proudu na vzdálenosti  $h$  od ústí kohoutku

$$r = r_0 \frac{\sqrt{v_0}}{\sqrt[4]{v_0^2 + 2gh}}.$$

## Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

### Měření velikosti zrnka křídového prachu

#### Teorie:

Na padající zrnko křídového prachu působí tíhová síla Země a odporová síla vzduchu. Pokud tvar zrnka budeme považovat za kulový a obtékání zrnka za laminární, platí pro odporovou sílu Stokesův vzorec  $F = 6\pi\eta r v$ , kde  $r$  je poloměr zrnka,  $v$  jeho rychlost a  $\eta$  je dynamická viskozita vzduchu. Pohybová rovnice padajícího zrnka je tedy

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho a(t) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi\eta r v(t),$$

kde  $\rho$  je hustota kříd,  $g$  je tíhové zrychlení a  $v(t)$ , resp.  $a(t)$ , je rychlost, resp. zrychlení, pádu zrnka v čase  $t$ . Protože odporová síla roste s rychlostí zrnka, dojde po určité době k jejímu vyrovnání s tíhovou silou. Zrnko se pak bude pohybovat rovnoměrně rychlostí  $v$ , pro niž platí

$$v = \frac{2}{9} \frac{r^2 \rho g}{\eta}.$$

Padá-li zrnko rovnoměrně touto rychlostí z výšky  $h$  a dopadne-li za dobu  $t$ , snadno vyjádříme poloměr zrnka vztahem

$$r = \sqrt{\frac{9}{2} \frac{h\eta}{\rho g t}}.$$

| $i$ | $t_i$ [s] |
|-----|-----------|
| 1.  | 1,80      |
| 2.  | 2,47      |
| 3.  | 3,17      |
| 4.  | 2,96      |
| 5.  | 3,09      |
| 6.  | 2,93      |
| 7.  | 2,61      |
| 8.  | 3,22      |
| 9.  | 2,77      |
| 10. | 2,59      |
| 11. | 2,32      |
| 12. | 2,47      |
| 13. | 2,37      |
| 14. | 2,81      |
| 15. | 2,18      |
| 16. | 2,69      |

#### Postup a výsledky měření:

K měření jsme použili prach z bílé školní křídly získaný třením křídly o papír. Prach jsme nechali padat z výšky  $h = 150$  cm a stopkami měřili dobu jeho pádu na podlahu (pád prachu byl odstartován klepnutím do papíru). Naměřené hodnoty jsou uvedeny v přiložené tabulce.

Zpracováním údajů v tabulce dostaneme průměrnou hodnotu spolu s odhadem chyby měření  $t = (2,7 \pm 0,5)$  s.

Výšku  $h$  jsme změřili pásovým měřidlem  $h = (150,0 \pm 0,5)$  cm. V tabulkách je uvedena hustota křídly  $(1800 - 2600)$  kg.m<sup>-3</sup>, vzali jsme tedy hodnotu  $\rho = (2200 \pm 400)$  kg.m<sup>-3</sup>. Pro viskozitu vzduchu při teplotě 0 °C uvádějí tabulky hodnotu  $\eta = 17,1 \cdot 10^{-6}$  Pa.s. Za tíhové zrychlení dosazujeme  $g = 9,81$  m.s<sup>-2</sup>. Podle výše uvedeného vztahu vypočítáme poloměr zrnka včetně chyby měření

$$r = (4,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

**Závěr:**

Protože zrnka prachu nebyla stejně velká a na zem nedopadla najednou, snažili jsme se měřit čas, ve kterém dopadlo na zem nejvíce zrněk. Tímto způsobem jsme tedy určili poloměr zrněk, která byla v prachu nejvíce zastoupena. Navíc je chyba měření poměrně velká (asi 20%) a předpoklad o kulovém tvaru zrněk značně diskutabilní, takže výsledek měření je nutno považovat pouze za řádový odhad velikosti zrnka. Největší podíl na chybě má měření času a odhad hustoty křídý. Odlišnost skutečného tvaru zrněk od kulového nebyla do chyby měření započítána a musí být posuzována samostatně.

**Poznámky:**

1. Při formulaci pohybové rovnice padajícího zrnka jsme neuvažovali působení vztlakové síly vzduchu. Hustota vzduchu je totiž oproti hustotě křídý zanedbatelná, a proto je zanedbatelná také vztlaková síla oproti tíhové síle působící na zrnko.
2. Postupem, který přesahuje středoškolský rámec, lze z pohybové rovnice odvodit závislost rychlosti zrnka na čase

$$v(t) = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta} \left( 1 - e^{-\frac{g}{2} \frac{\eta}{r^2 \rho} t} \right).$$

Dosazením výše uvedených hodnot se lze snadno přesvědčit, že již po velmi krátkém časovém úseku lze exponenciální člen zanedbat proti jedničce a pohyb zrnka tak považovat za rovnoměrný.