

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

8. ročník — 2001/2002

Vzorová řešení druhé série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (4 body)

Kniha na válci

Na každou polovinu otevřené knihy působí v těžišti tíhová síla $\vec{F}_G$, v bodě kontaktu s válcem tlaková síla $\vec{N}$ kolmá k povrchu válce a ve hřbetě druhá polovina knihy silou $\vec{F}$ (viz obrázek 1). Podmínka momentové rovnováhy pro každou z částí knihy, formulovaná vzhledem k vodorovné ose jdoucí hřbetem, má tvar

$$F_G \frac{l}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = N \frac{R}{\tan \frac{\alpha}{2}}. \quad (1)$$

Současně platí, že průmět síly $\vec{N}$ do svislého směru je stejně velký, ale opačně orientovaný než tíhová síla, tj.

$$N \sin \frac{\alpha}{2} = F_G. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) vychází¹

$$l \sin^3 \frac{\alpha}{2} = 2R \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

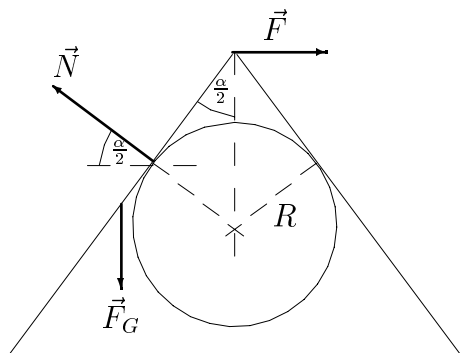
Dosadíme-li $\cos \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ a umocníme, dostaneme²

$$l^2 x^3 = 4R^2 (1 - x), \quad \text{kde} \quad x = \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

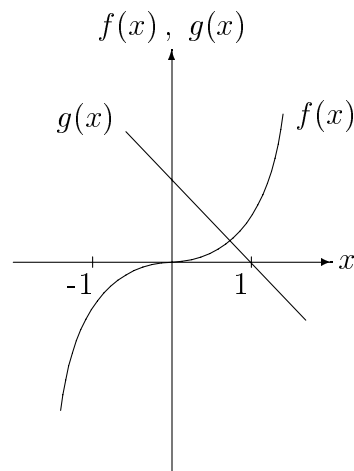
¹Pokud uvažujeme knihu jako celek, jsou síly působící ve hřbetu knihy vnitřními silami soustavy. V podmínce silové a momentové rovnováhy pak figurují pouze tíhové síly a tlakové síly působící na jednotlivé poloviny knihy.

²Uvědomme si, že umocnění je zde ekvivalentní úpravou, neboť $\frac{\alpha}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ a obě dvě strany rovnice jsou proto nezáporné.

Tato rovnice pro $x = \sin \frac{\alpha}{2}$ má právě jeden reálný kořen v intervalu $(0, 1)$, jak je vidět z obrázku 2, v němž jsou schematicky znázorněny průběhy funkcí $f(x) = l^2 x^3$ a $g(x) = 4R^2(1 - x)$. Řešení rovnice (4) pro konkrétní hodnoty l a R určíme např. numericky nebo užitím Cardanových vzorců³.



Obrázek 1



Obrázek 2

Vzorové řešení úlohy č. 2 (10 bodů)

Kondenzátor s kapalným dielektrikem

Při řešení této úlohy vyjdeme z poznatku, že ve stálé rovnovážné poloze má soustava minimální energii. Energie E soustavy je zde součtem energie elektrického pole nabitého kondenzátoru E_E , potenciální energie tíhové E_{P1} dielektrika v levé části spojené nádoby, potenciální energie tíhové E_{P2} dielektrika v pravé části spojené nádoby a potenciální energie tíhové E_{P3} dielektrika ve vodorovné spojovací části. Poslední veličina je však při jakékoli poloze hladin vždy stejná, a proto ji při výpočtu minimální hodnoty energie soustavy nemusíme uvažovat. Vyjádříme tedy jednotlivé veličiny ve vztahu

$$E = E_E + E_{P1} + E_{P2}. \quad (1)$$

Kondenzátor můžeme považovat za dva sériově zapojené kondenzátory s kapacitami C_1 a C_2 . Mezi deskami dolního kondenzátoru je dielektrikum, mezi deskami horního kondenzátoru je vzduch, jehož relativní permitivita je přibližně rovna permitivitě vakua ϵ_0 . Protože se na hladině dielektrika indukuje náboj $\pm Q$, platí pro elektrostatickou energii celého kondenzátoru vztah

$$E_E = \frac{Q^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2}, \quad (2)$$

kde

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S_1}{c - x}, \quad C_2 = \frac{\epsilon S_1}{x}. \quad (3)$$

³Naleznete je v přehledech matematiky, např. *Rektorys, K. a kol.: Přehled užití matematiky* nebo *Bartsch, H. J.: Matematické vzorce*.

Význam použitých symbolů je zřejmý z obrázku 3. Dosazením (3) do (2) dostáváme po úpravách

$$E_E = \frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S_1} [\epsilon c - x(\epsilon - \epsilon_0)]. \quad (4)$$

K určení potenciální energie tíhové dielektrika zvolíme hladinu nulové potenciální energie tíhové vodorovnou rovinu procházející dnem spojené nádoby. Potom platí

$$E_{P1} = m_1 g \frac{x+b}{2} = \rho g S_1 \frac{(x+b)^2}{2}, \quad (5)$$

$$E_{P2} = m_2 g \frac{y}{2} = \rho g S_2 \frac{y^2}{2}, \quad (6)$$

kde m_1 , resp. m_2 je hmotnost dielektrika v levé, resp. pravé části spojené nádoby, g je tíhové zrychlení a ρ je hustota dielektrika (význam ostatních veličin je opět zřejmý z obrázku 3). Výšku y hladiny dielektrika v pravé části spojené nádoby určíme ze vztahu pro celkový objem dielektrika:

$$(S_1 + S_2) a = S_1 (x + b) + S_2 y \implies y = \frac{(S_1 + S_2) a - S_1 (x + b)}{S_2}. \quad (7)$$

Užitím (4) – (7) a (1) dostáváme

$$E = E(x) = px^2 + qx + r, \quad (8)$$

kde

$$p = \frac{\rho g S_1}{2} + \frac{\rho g S_1^2}{2S_2}, \quad (9)$$

$$q = \rho g S_1 b + \frac{\rho g S_1^2}{S_2} b - \frac{2\rho g S_1 (S_1 + S_2)}{S_2} a - \frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S_1} (\epsilon - \epsilon_0), \quad (10)$$

$$r = \frac{\rho g S_1}{2} b^2 + \frac{\rho g S_1^2}{2S_2} b^2 + \frac{\rho g (S_1 + S_2)^2}{2S_2} a^2 - \frac{\rho g S_1 (S_1 + S_2)}{S_2} ab^2 + \frac{Q^2 \epsilon_0}{2\epsilon_0\epsilon S_1} c. \quad (11)$$

Protože $p > 0$, je grafem funkce $E(x)$ parabola otevřená směrem vzhůru a funkce $E(x)$ nabývá svého minima v bodě vrcholu paraboly. Hledanou souřadnici x vrcholu určíme převedením vztahu (8) na úplný čtverec, tj.

$$E = px^2 + qx + r = p \left(x + \frac{q}{2p} \right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}. \quad (12)$$

Funkce $E(x)$ tedy nabývá minima v bodě

$$x = -\frac{q}{2p}, \quad (13)$$

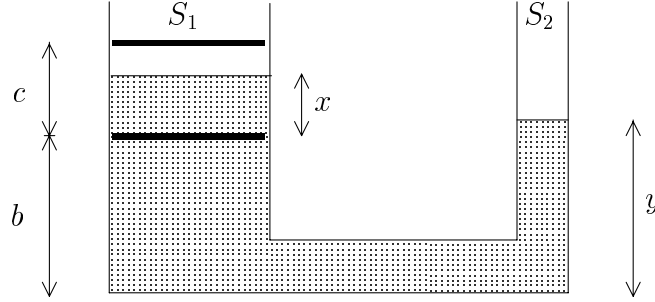
což po dosazení (9) a (10) dává výsledek

$$x = \frac{Q^2 S_2}{2\rho g \epsilon_0 \epsilon S_1^2 (S_1 + S_2)} (\epsilon - \epsilon_0) + (a - b). \quad (14)$$

Protože je podle nákresu v zadání $a > b$, je $x > 0$. Současně ovšem pro obecný výsledek (14) musíme přijmout omezení $x \leq c$ (pro $x > c$ by se část dielektrika nacházela nad horní deskou kondenzátoru, tedy mimo elektrické pole, a proto by vlivem gravitačního působení klesala). Pokud by podle zadání bylo $b \geq a$, dielektrikum by mezi

desky kondenzátoru vůbec nevystoupilo, protože by se v počátečním stavu nacházelo mimo elektrické pole v rovnovážné poloze stálé. Všimněme si, že výsledek (14) nezávisí na polaritě pole mezi deskami kondenzátoru.

Poznámka: Parametr popisující změnu polohy hladiny dielektrika (zde x) lze samozřejmě volit i jinak, např. odečítat od původní rovnovážné polohy hladin. Početní postup je pak zcela analogický.



Obrázek 3

Vzorové řešení úlohy č. 3 (6 bodů)

Dva písty ve válci

Na počátku pokusu je podle zadání tlak mezi oběma písty roven atmosferickému tlaku p_0 , a proto je pružina nenapjatá. Uvažujme nyní – bez ohledu na konkrétní průběh pokusu – stav, v němž je pravý píst na konci válce a soustava je v klidu. Označme x prodloužení pružiny (tj. posunutí levého pístu) a p tlak plynu uzavřeného mezi písty (viz obrázek 4). Podmínka silové rovnováhy pro levý píst má tvar

$$F_p = kx = p_0S - pS, \quad (1)$$

kde $\vec{F}_p$ je síla, již na píst působí pružina. Pro pravý píst podobně platí

$$F = p_0S - pS. \quad (2)$$

Považujeme-li plyn za ideální a předpokládáme-li, že jeho teplota je na začátku i na konci pokusu stejná, vychází ze stavové rovnice

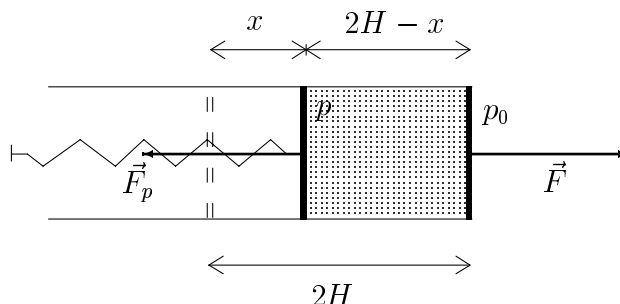
$$p_0H = p(2H - x). \quad (3)$$

Rovnice (1) – (3) tvoří soustavu o třech neznámých F , x a p . Jejím řešením dostaneme

$$F^2 - F(2Hk + p_0S) + Hkp_0S = 0 \quad (4)$$

a odtud

$$F = \frac{2Hk + p_0S \pm \sqrt{(2Hk)^2 + (p_0S)^2}}{2}. \quad (5)$$



Obrázek 4

Vzorové řešení úlohy č. 4 (5 bodů)

Vodovodní trubka

Uvažujme vodorovnou část trubky znázorněnou na obrázku 5. Na tuto část působí v těžišti síla

$$\vec{F}_1 = (m + M) \vec{g}, \quad (1)$$

kde M je hmotnost uvažované části trubky, m je hmotnost v ní obsažené vody a $\vec{g}$ je vektor tíhového zrychlení. Dále na ni v ohybech působí tlakové síly $\vec{F}_2$ a $-\vec{F}_2$ vody, jejíž proudění v těchto oblastech mění směr (předpokládáme, že proudění je ustálené). Konečně na trubku působí okolní části potrubí silami, jejichž výslednici označíme $\vec{F}_0$ a jejich moment $\vec{M}_0$. Má-li být pro vodorovnou část trubky splněna podmínka silové rovnováhy, musí platit $\vec{F}_0 = \vec{F}_1$. Působíště síly $\vec{F}_0$ ani výsledný moment $\vec{M}_0$ však neznáme (tyto veličiny závisí mj. na pružnosti materiálu trubky). Zde budeme pro jednoduchost předpokládat, že $\vec{M}_0 = \vec{0}$ a trubka má natolik malý průřez, že vektorovou přímkou síly $\vec{F}_0$ můžeme položit do levé stěny trubky (viz obrázek 5).

Momentová rovnováha vzhledem k vodorovné ose procházející levým dolním rohem trubky má potom tvar

$$F_1 \frac{l}{2} = F_2 l \cos 45^\circ, \quad (2)$$

tj.

$$(m + M) g = \sqrt{2} F_2. \quad (3)$$

K určení $\vec{F}_2$ použijeme Newtonových zákonů. Podle zákona akce a reakce působí voda na trubku stejně velkou, ale opačně orientovanou silou než trubka na vodu. Podle druhého Newtonova zákona platí

$$F_2 = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t} \quad \text{pro} \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad (4)$$

kde $\Delta \vec{p}$ je změna hybnosti vody, která projde ohybem trubky za velmi krátkou dobu $\Delta t \rightarrow 0$. Předpokládejme, že trubka má neměnný průřez S a voda je ideální kapalinou. Za dobu Δt projde každým z ohybů voda o hmotnosti

$$\Delta m = \rho S v \Delta t, \quad (5)$$

kde ρ je hustota vody a v konstantní velikost rychlosti jejího proudění. Současně je

$$\Delta \vec{p} = \Delta m \Delta \vec{v}, \quad (6)$$

kde $\Delta\vec{v}$ je změna vektoru rychlosti proudění po průchodu daným ohybem. Uvažujme průchod pravým ohybem (pro levý ohyb postupujeme analogicky). Podle obrázku 6 platí

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \quad |\Delta\vec{v}| = \sqrt{2}v. \quad (7)$$

Z (4) – (7) vychází

$$F_2 = \sqrt{2}\rho S v^2. \quad (8)$$

Dosazením tohoto vztahu do podmínky momentové rovnováhy (3) dostaneme užítím

$$m = \rho S l, \quad (9)$$

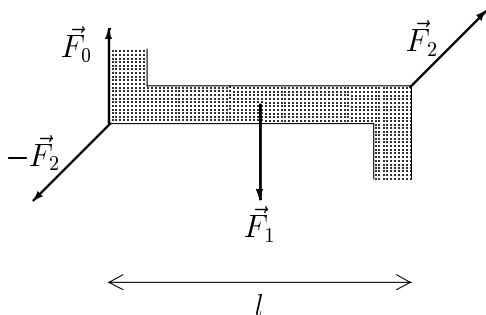
kde l a S je délka a průřez trubky, pro rychlost proudění vody potrubím výsledek

$$v = \sqrt{\frac{g}{2} \left(l + \frac{M}{\rho S} \right)}. \quad (10)$$

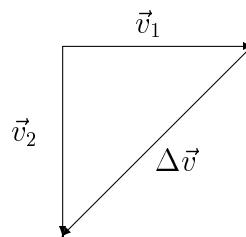
Aby byla trubka vodorovná, musí v ní voda proudit rychlostí určenou vztahem (10). K jejímu výpočtu potřebujeme znát hmotnost trubky, délku a průřez trubky, hustotu vody a tíhové zrychlení.

*Poznámka: Největším problémem zde bylo určení směru síly $\vec{F}_2$ a dále fakt, že na velikost změny hybnosti má vliv **změna** směru proudění kapaliny. Toto bylo správně rozmyšleno pouze u jednoho řešení.*

Dále se téměř nikdo nezabýval přechodem od reality k modelu, tedy diskusí o působišti síly $\vec{F}_0$.



Obrázek 5



Obrázek 6

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Nebeský výtah

Uvažujme lano o takové délce, že je vzhledem k neinerciální vztažné soustavě spojené se Zemí v klidu. Na lano jako celek působí výsledná gravitační síla $\vec{F}_g$ a výsledná síla setrvačná odstředivá $\vec{F}_o^*$, pro něž platí

$$\vec{F}_g + \vec{F}_o^* = \vec{0}, \quad \text{tj.} \quad F_g = F_o^*. \quad (1)$$

Všimněme si velmi malého elementu lana o hmotnosti Δm umístěného ve vzdálenosti r od středu Země. Označíme-li S průřez lana, ρ jeho hustotu a Δr délku příslušného elementu, má gravitační síla, která na element působí, velikost

$$\Delta F_g = \frac{\kappa M \Delta m}{r^2} = \frac{\kappa M S \rho \Delta r}{r^2}, \quad (2)$$

kde κ je gravitační konstanta a M je hmotnost Země. Podobně síla setrvačná odstředivá působící na element má velikost

$$\Delta F_o^* = \omega^2 r \Delta m = \omega^2 S \rho r \Delta r, \quad (3)$$

kde ω je úhlová rychlost zemské rotace. Velikost výsledné gravitační síly, resp. velikost výsledné síly setrvačné odstředivé působící na lano získáme sečtením sil působících na jednotlivé elementy po celé délce lana, tj.

$$F_g = \sum \Delta F_g, \quad F_o^* = \sum \Delta F_o^*. \quad (4)$$

Vztahy (2) – (4) platí tím přesněji, čím menší elementy lana uvažujeme. Limitním přechodem $\Delta m \rightarrow 0$, resp. $\Delta r \rightarrow 0$ přechází sumace ve vztahu (4) v integraci. Označíme-li R poloměr Země a L hledanou délku lana, platí

$$F_g = \int_R^{R+L} \frac{\kappa M S \rho}{r^2} dr = \kappa M S \rho \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L} \right), \quad (5)$$

$$F_o^* = \int_R^{R+L} \omega^2 S \rho r dr = \frac{\omega^2 S \rho}{2} [(R+L)^2 - R^2]. \quad (6)$$

Ze vztahů (5), (6) a (1) získáme kvadratickou rovnici pro délku lana

$$L^2 + 3RL + 2R^2 - \frac{2\kappa M}{R\omega^2} = 0, \quad (7)$$

jejíž nezáporné řešení je

$$L = \frac{\sqrt{(3R)^2 - 4\left(2R^2 - \frac{2\kappa M}{R\omega^2}\right)} - 3R}{2}. \quad (8)$$

Dosazením hodnot $R = 6,38 \cdot 10^6$ m, $\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11}$ N.m².kg⁻², $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg a $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde $T = 24$ hod, vychází

$$L \doteq 144\,900 \text{ km}. \quad (9)$$

Porovnejme tento údaj s poloměrem l stacionární dráhy. Pro těleso pohybující se po stacionární dráze úhlovou rychlostí ω je gravitační zrychlení zrychlením dostředivým, proto

$$\omega^2 l = \frac{\kappa M}{l^2} \Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{\kappa M}{\omega^2}} \doteq 42\,400 \text{ km}. \quad (10)$$

Vidíme tedy, že lano musí skutečně sahat daleko za stacionární dráhu.

Odhadněme maximální napětí v laně. Napětí $\sigma(x)$ v místě ve vzdálenosti x od středu Země vyvolává výslednice gravitační síly a síly setrvačné odstředivé působící

na část lana o délce $L - x$ (podle pokynu v zadání zanedbáváme gravitační působení jednotlivých částí lana na sebe). Platí

$$F_{gx} = \int_R^{R+x} \frac{\kappa M S \rho}{r^2} dr = \kappa M S \rho \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+x} \right), \quad (11)$$

$$F_{ox}^* = \int_R^{R+x} \omega^2 S \rho r dr = \frac{\omega^2 S \rho}{2} [(R+x)^2 - R^2]. \quad (12)$$

Napětí v laně je tedy v závislosti na x určeno vztahem

$$\sigma(x) = \left| \frac{F_{gx} - F_{ox}^*}{S} \right| = \left| \kappa M \rho \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+x} \right) - \frac{\omega^2 \rho}{2} [(R+x)^2 - R^2] \right|. \quad (13)$$

Výpočtem první a druhé derivace se přesvědčíme, že funkce $\sigma(x)$ nabývá lokálního maxima v bodě

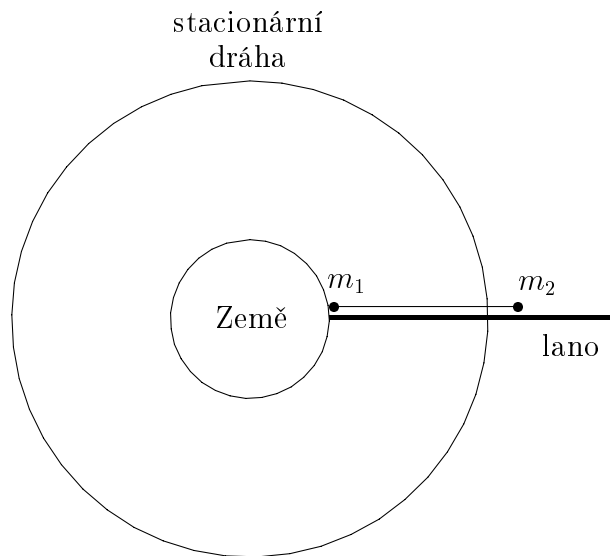
$$x_{\max} = l = \sqrt[3]{\frac{\kappa M}{\omega^2}} \doteq 42\,400 \text{ km}. \quad (14)$$

Dosazením této hodnoty a hustoty oceli $\rho \doteq 8000 \text{ kg.m}^{-3}$ do vztahu (13) vychází pro maximální napětí v laně

$$\sigma_{\max} \doteq 390\,000 \text{ MPa}, \quad (15)$$

což je téměř dvěstěkrát větší hodnota než mez pevnosti oceli $\sigma_p = 2000 \text{ MPa}$. Poznamenejme ještě, že $\sigma(0) = \sigma(L) = 0$, tj. lano nebude působit žádnou silou na Zemi.

Závěrem si – alespoň kvalitativně – všimneme nebeského výtahu. Realizovat jej můžeme dvěma spojenými tělesy o hmotnostech m_1, m_2 (viz obrázek 7), jejichž vzdálenost je taková, aby velikost výsledné síly setrvačné odstředivé působící na soustavu přesáhla velikost výsledné síly gravitační. Pohyb těles však nezle jednoduše matematicky popsat, protože velikost výsledné síly se v průběhu pohybu mění. Současně je nutno uvažovat také vliv síly setrvačné Coriolisovy, která je kolmá na vektor úhlové rychlosti Země a na vektor rychlosti obou těles.



Obrázek 7