

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

8. ročník — 2001/2002

Vzorová řešení třetí série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (5 bodů)

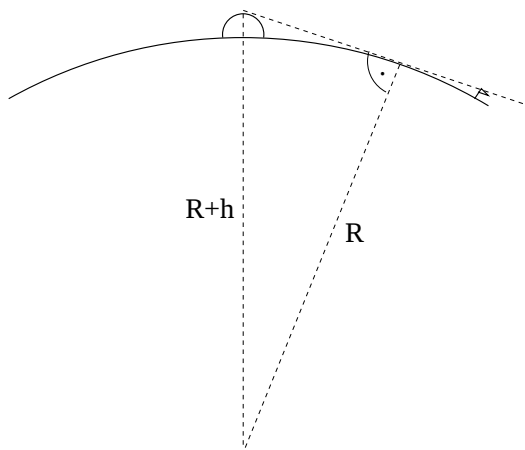
Trosečník na ostrově

Situace trosečníka je jasná z obrázku 1. Trosečník je ve vzdálenosti $R+h = 6378,8$ km od středu Země, zatímco obzor, na kterém loď vyhlíží, ve vzdálenosti $R = 6378,0$ km. Vypočítáme délku kratší odvěsny pravoúhlého trojúhelníka s délkami přepony a delší odvěsny uvedenými výše:

$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \doteq 101 \text{ km.}$$

Trosečník tedy uvidí malé loďky vzdálené maximálně 101 km. Na to, aby loďku v takové vzdálenosti rozeznal, už asi bude potřebovat dalekohled. Ten mu však neumožní vidět "za roh", či spíše za zaoblení Země.

Co se týče velkých lodí, uvidí je trosečník ze vzdálenosti větší než d . Například je-li loď vysoká 20 m, zjistíme podobným výpočtem, že je z ní (a na ni!) vidět do vzdálenosti nejvýše 16 km. Takže vzdálenost, do které uvidí trosečník projíždějící loď, může být v ideálním případě (při výšce lodi 20 m) zhruba $101 \text{ km} + 16 \text{ km} = 117 \text{ km}$.



Obrázek 1

Vzorové řešení úlohy č. 2 (6 bodů)

Rychlost pohybu stínu Eiffelovky

21. března, tedy o jarní rovnodennosti, je pohyb Slunce po obloze na všech místech na Zemi obzvláště jednoduchý: vychází přesně na východě, zapadá přesně na západě a mezi tím se pohybuje v rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel

$$\alpha = 90^\circ - \theta,$$

kde θ je zeměpisná šířka. **V této rovině** obíhá Slunce rovnoměrně úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ hodin}} \doteq 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Protože úloha je náročná na prostorovou představivost, ukážeme nejprve, jak vypadá pohyb stínu věže o výšce h na rovníku. To pomůže objasnit situaci v Paříži i některé z chyb, jichž jste se dopouštěli.

Na rovníku ($\theta = 0$) se Slunce pohybuje ve svislé rovině ($\alpha = 90^\circ$). **V poledne** se nachází přesně v nadhlavníku a délka stínu věže je proto nulová. Po uplynutí času Δt bude spojnice Slunce–vrchol věže svírat se svislicí úhel (obrázek 2)

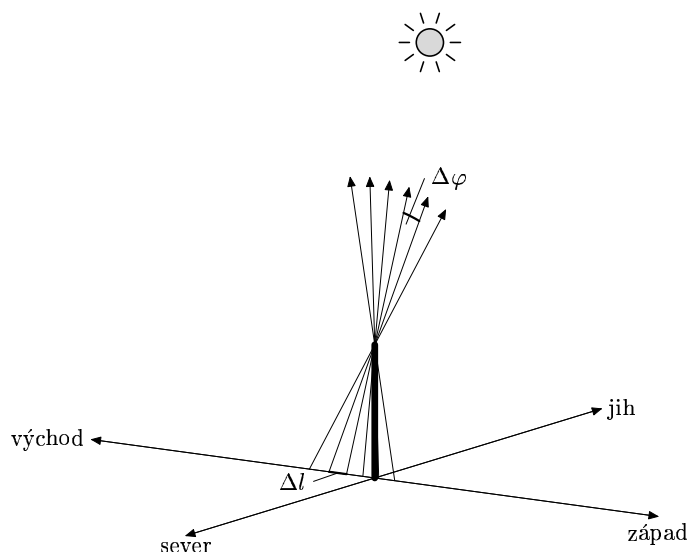
$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

a délka stínu bude $\Delta l = h \cdot \tan \Delta\varphi$. Okamžitou rychlost stínu v poledne spočteme běžným postupem:

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{h \cdot \tan \omega\Delta t}{\Delta t} = h\omega.$$

Zde jsme využili toho, že pro malé úhly (zadané v radiánech) je $\tan \Delta\varphi \doteq \Delta\varphi$. Všimněte si, že rychlost špičky stínu je rovna ω krát vzdálenost vrcholu věže od špičky stínu v daném okamžiku. Tento výsledek pro rychlost stínu v poledne nezávisí na zeměpisné šířce.

Tvrzení vyplývá z geometrických úvah: Představme si kružnici ležící v rovině svírající úhel α s vodorovnou rovinou se středem ve vrcholu věže. Její poloměr r nechť je roven vzdálenosti vrcholu věže a špičky stínu v pravé poledne (obrázek 3). Tato kružnice se tedy dotýká vodorovné roviny v místě, kde se v poledne nachází špička stínu věže. Uvažujme dále spojnici Slunce–vrchol věže. Tato přímka rotuje v naší šikmé rovině konstantní úhlovou rychlostí ω a oba její průsečíky s uvažovanou kružnicí se po ní pohybují rovnoměrně rychlostí ωr . Po Zemi se stín Eiffelovky pohybuje po křivce, která má v poledne společnou tečnu s uvažovanou kružnicí. Protože špička stínu leží na spojnici Slunce–vrchol věže, musí být její rychlost v poledne také ωr .

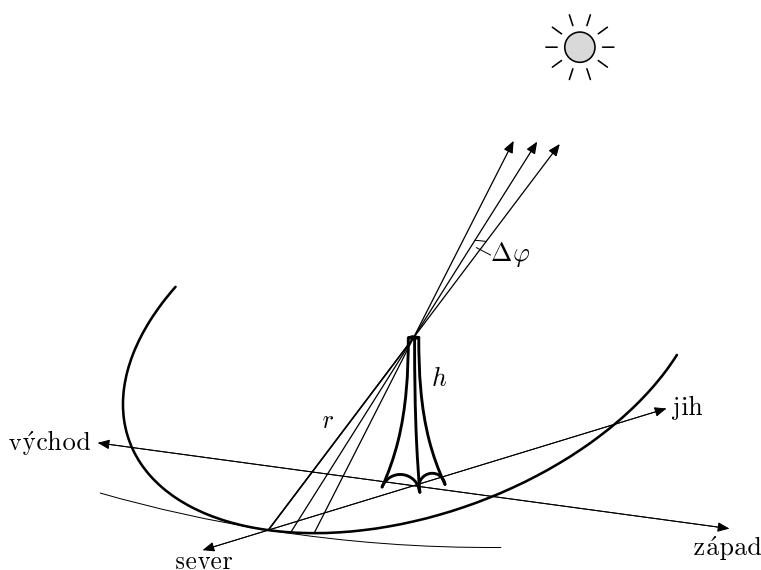


Obrázek 2

Paříž leží na 49° severní zeměpisné šířky, proto se v den rovnodennosti nachází 41° nad obzorem. Délka stínu Eiffelovky, jejíž výška je podle naučného slovníku přibližně 320 m, je v poledne $\frac{320 \text{ m}}{\tan 41^\circ} \doteq 368 \text{ m}$. Vzdálenost špičky stínu od vrcholu věže je potom $\frac{320 \text{ m}}{\sin 41^\circ} \doteq 488 \text{ m}$ (obrázek 3). Mohli bychom, stejně jako na rovníku, počítat okamžitou rychlost pohybu stínu z polohy stínu v poledne a z polohy v "poledne $+\Delta t$ ", to by však bylo zbytečně složité. Místo toho použijeme výše uvedeného tvrzení a vynásobíme vzdálenost vrcholu věže od špičky stínu úhlovou rychlostí ω . Vychází

$$v = \omega \cdot 488 \text{ m} \doteq 3,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rychlost špičky stínu Eiffelovky v poledne 21. března tedy je přibližně 3,5 centimetrů za sekundu.



Obrázek 3

Možná se vám řešení úlohy zdálo jasné z obrázku. Pokud bylo správné, pak máte dobrou prostorovou představivost. A pokud správné nebylo, pak jste asi násobili úhlovou rychlost délkou stínu. Jak je však vidět ze situace na rovníku (délka stínu je nula, rychlost nikoliv) má vaše úvaha své chyby a doporučuji dobře rozmyslet jaké. Zkuste si to třeba s baterkou a tužkou...

Vzorové řešení úlohy č. 3 (8 bodů)

Kosmická loď

Připomeňme, že se zabýváme urychlováním rakety v prázdném prostoru bez jakéhokoliv gravitačního pole ¹.

U první části úlohy je výhodná představa dvoustupňové rakety, která se skládá z modulu a dvou stupňů. První stupeň urychlí raketu na rychlost $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, čímž se spálí a jeho zbytky odpadnou... Poté se zažehne druhý stupeň, který raketu (vlastně už pouze modul) opět urychlí o $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Tak je modul urychlen na výsledných $20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Druhý stupeň musí vážit 30 tun, protože urychluje modul o hmotnosti 1000 kg o $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Dohromady váží modul a druhý

¹Pokud bychom chtěli řešit, kolik paliva je třeba pro vynesení družice na oběžnou dráhu, museli bychom samozřejmě gravitační pole uvažovat.

stupeň 31 tun, a proto je hmotnost prvního stupně $31 \cdot 30 \text{ tun} = 930 \text{ tun}$. Celková hmotnost paliva je potom 960 tun.

Pro získání obecného řešení problému provedeme vlastně stejné úvahy jako v předchozí části, jenom místo konkrétních čísel použijeme proměnné. Budeme uvažovat modul o jednotkové hmotnosti, na jehož urychlení o rychlost u je potřeba Q paliva. Má-li být modul urychlen na rychlost $2u$, bude celková hmotnost rakety $(Q+1)^2$ (hmotnost modulu je 1, hmotnost druhého stupně je Q a hmotnost prvního stupně $Q(Q+1)$). Analogickým postupem zjistíme, že má-li být raketa urychlena na rychlost $3u$, musí mít celkovou hmotnost $(Q+1)^3$. Pro urychlení na rychlost $v = Nu$ musí mít hmotnost

$$(Q+1)^N = (Q+1)^{\frac{v}{u}}.$$

Dá se očekávat, že tento vztah platí i tehdy, když $\frac{v}{u}$ není celé číslo.

A co když hmotnost modulu není jednotková, ale třeba m ? Je jasné, že na urychlení dvakrát těžšího modulu je potřeba dvakrát více paliva. Proto je obecně hmotnost paliva

$$m \left[(Q+1)^{\frac{v}{u}} - 1 \right].$$

Zkuste užitím tohoto vzorce odhadnout, kolik paliva budeme potřebovat k urychlení tuny na $10\,000 \text{ km.s}^{-1}$. Z toho je vidět, že důvod, proč nikdy nepoletíme ke hvězdám, není jen v teorii relativity.

Vzorové řešení úlohy č. 4 (6 bodů)

Dolů nebo nahoru?

Jako každý problém, i tento je velmi jednoduchý, když se ví, jak na něj. Pokus k úspěšnému vyřešení hodně pomůže, bylo však nutné dostatečně eliminovat tření v kladkách. Těleso, které se kýve, označme 1 a to, které se nekýve, 2. Velikost tahové síly lanka označme F (tahové síly lanka mají stejnou velikost pro obě tělesa). Pro zrychlení tělesa 2 platí (obrázek 4)

$$a_2 = \frac{mg - F}{m},$$

pro **vertikální** složku zrychlení tělesa 1 potom

$$a_1 = \frac{mg - F \cos \varphi}{m},$$

kde φ je úhel, který svírá vlákno s vertikálou. Když tyto dvě rovnice od sebe odečteme, máme

$$a_1 - a_2 = \frac{F}{m}(1 - \cos \varphi).$$

Jak je vidět, je výraz na pravé straně vždy nezáporný, a proto musí být

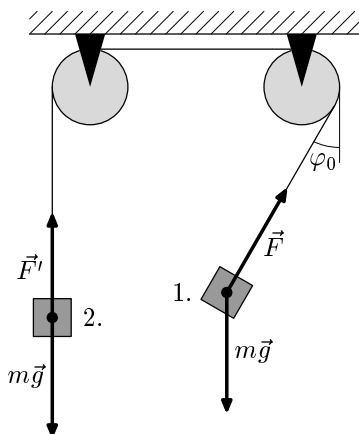
$$a_1 \geq a_2.$$

To znamená, že pokud byla obě tělesa na počátku ve stejné výšce a v klidu, pak v libovolném pozdějším okamžiku bude těleso 1 níže než těleso 2. Zbývá ještě zjistit, jaké bude zrychlení tělesa 2 v počátečním okamžiku. To ovšem záleží na způsobu rozhoupávání. Uveďme příklady:

- Těleso 1 vychýlíme o 90° . Je zřejmé, že v prvním okamžiku bude zrychlení tělesa 2 orientováno dolů.

- Tělesu 1 v rovnovážné poloze udělíme rychlost ve vodorovném směru. Pak bude zřejmě zrychlení tělesa 2 orientováno vzhůru.

Takže to shrňme: Počáteční orientace zrychlení těles závisí na způsobu rozhoupání. Vždy však bude vertikální složka zrychlení houpačícího se tělesa větší než tělesa, které se nekýve. To znamená, že těleso 1 se bude dostávat níž a níž.



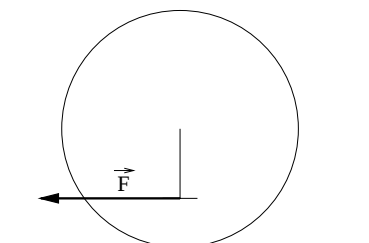
Obrázek 4

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Kam pojede kolo?

Každý, kdo se úlohu pokusil řešit, si jistě pokus dobře vyzkoušel a zjistil, že kolo jede vždy dozadu (tedy ve směru působící síly). Otázka uvedená v zadání však napovídala, že výsledek na zařazeném převodu závisí...

Nejprve si odděleně všimneme zajímavého speciálního případu, kdy je nastaven převod 1:1 (tzn. talíř i zadní převodové kolečko mají stejný počet zubů). Pak převod řetězem nehraje žádnou roli a pro naše potřeby si můžeme představovat, že šlapátka jsou upevněna přímo v ose otáčení zadního kola² (obrázek 5). Zatáhneme-li za spodní šlapátko takového kola, rozjede se kolo dozadu (ve směru působící síly). To vyplývá ihned z uvažování momentu síly vzhledem k okamžité ose otáčení jdoucí bodem dotyku kola s podložkou.



Obrázek 5

²Na takovém kole jezdí cirkusáci nebo Večerníček.

K řešení obecné situace označme sílu působící na šlapátko $\vec{F}$, na zadní kolo pak působí třecí síla $\vec{T}$ (obrázek 6). Přední kolo neuvažujeme, nemá pro nás význam. Délka šlapací páky nechť je d , poloměr talíře r_1 , poloměr zadního převodového kolečka r_2 a poloměr zadního kola R . Při řešení použijeme malého triku³. Zadní kolo budeme držet silou $\vec{F}_0$ tak, aby kolo nikam nejelo. Určením směru této síly zjistíme též směr, kterým se kolo rozjede, když jej pustíme. Ze silové rovnováhy pro vnější síly plyne (obrázek 6)

$$F_0 = F - T.$$

Síla $\vec{F}$ působí na talíř momentem $d \cdot F$, což musí vyrovnávat moment síly řetězu $\vec{F}_1$, tj.

$$r_1 \cdot F_1 = d \cdot F.$$

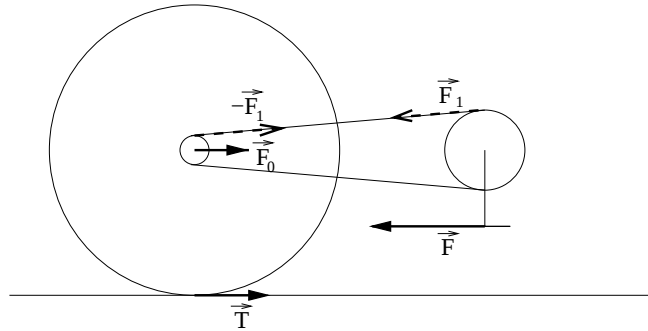
Stejně velkou silou působí řetěz na zadní kolečko. Pokud se zadní kolo nesmýká, musí moment této síly vyrovnávat moment třecí síly $\vec{T}$, tedy

$$r_2 \cdot F_1 = R \cdot T.$$

Třecí síla musí mít proto opačný směr než síla $\vec{F}$. Celkem tedy platí

$$T = \frac{r_2 d}{r_1 R} F \quad \text{a} \quad F_0 = F \cdot \left(1 - \frac{r_2 d}{r_1 R} \right).$$

Pro běžná kola jsou typické velikosti $R \doteq 35$ cm, $d \doteq 20$ cm a zadní převodové kolečko je menší než talíř ($r_2 < r_1$). Výraz v závorce je tedy větší než nula. Proto pro běžná kola musí $\vec{F}_0$ působit proti směru $\vec{F}$, což znamená, že když kolo pustíme, pojedí ve směru $\vec{F}$. Kdyby ale bylo zadní kolečko zhruba dvakrát větší než talíř, pak by byl výraz v závorce menší než nula a síla $\vec{F}_0$ by musela působit ve směru $\vec{F}$. Kdybychom pak kolo pustili, rozjelo by se dopředu, proti směru $\vec{F}$.



Obrázek 6

³Bylo by možné rozepsat si pohybové rovnice a řešit je. Tím bychom zjistili i velikost zrychlení, nám však stačí znát jeho směr.