

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

8. ročník — 2001/2002

Vzorová řešení čtvrté série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (8 bodů)

Volný pád Měsíce

Než přistoupíme k vlastnímu řešení úlohy, připomeňme první a třetí Keplerův zákon pro pohyb planet. Podle prvního Keplerova zákona se planety pohybují po elipsách¹ (málo odlišných od kružnic), v jejichž společném ohnisku je Slunce. Třetí Keplerův zákon pak říká, že poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií, tj.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \implies \frac{T^2}{a^3} = \textit{konst.}, \quad (1)$$

kde T je oběžná doba planety a a je délka hlavní poloosy její trajektorie. Abychom určili konstantu na pravé straně vztahu (1), uvažujme těleso o hmotnosti m , které se kolem Slunce pohybuje po kružnici o poloměru r . Gravitační síla, jíž na ně působí Slunce, je silou dostředivou, proto platí

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{m M_\odot}{r^2}, \quad (2)$$

¹Elipsou rozumíme množinu bodů v rovině, pro něž je součet vzdáleností od dvou pevných bodů, ohnisek, roven konstantě (dvojnásobku velké poloosy elipsy).

kde G je gravitační konstanta a $M_\odot$ je hmotnost Slunce. Dosadíme-li za oběžnou rychlost tělesa $v = \frac{2\pi r}{T}$, dostáváme po úpravě²

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \quad (3)$$

a kombinací se vztahem (1) potom

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} = konst. \quad (4)$$

Keplerovy zákony však mají obecnější platnost. Můžeme je např. aplikovat na pohyb těles (družic, Měsíce) kolem Země. Ve vztahu (4) pouze stačí nahradit $M_\odot \leftrightarrow M$, kde M je hmotnost Země, tj.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = konst. \quad (5)$$

Nyní již můžeme přistoupit k vlastnímu řešení úlohy. Předpokládejme, že Měsíc byl jistým vnějším zásahem zbaven své obvodové rychlosti kolem Země a začíná tedy k Zemi volně padat. Jeho trajektorii je opět elipsa, která degeneruje v úsečku. Jedno z ohnisek elipsy přitom leží ve středu Země, druhé v počátečním bodě dráhy Měsíce (na tomto místě doporučujeme znovu si připomenout definici elipsy). Hlavní poloosa elipsy tedy odpovídá polovině původní vzdálenosti R Země a Měsíce a doba volného pádu Měsíce t je polovinou oběžné doby určené ze vztahu (5). Po úpravách a dosazení tabulkových hodnot jednotlivých veličin vychází

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^3}{GM}} \doteq 5 \text{ dní}. \quad (6)$$

Poznámka: Možná se bude některým z vás zdát zbytečné počítat hodnotu konstanty vystupující ve třetím Keplerově zákoně. Mnozí jste totiž určovali dobu volného pádu Měsíce přímo ze vztahu

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}. \quad (7)$$

Je to skutečně možné, jenom je třeba uvědomit si některé souvislosti. Třetí Keplerův zákon popisuje pohyb těles (planet) kolem konkrétního společného objektu. My se sice zabýváme pohybem jediného tělesa (Měsíce), sledujeme však jeho pohyb ve dvou různých případech: při obvyklém pohybu kolem Země a při volném pádu. Ve vztahu (7) je tedy T_1 oběžná doba Měsíce a a_1 jeho vzdálenost od Země za normálních okolností, veličiny $a_2 = \frac{1}{2}a_1$ a $T_2 = 2t$ se pak vztahují k volnému pádu Měsíce.

²Dodejme, že provedený výpočet platí pouze za předpokladu $m \ll M_\odot$. V opačném případě bychom totiž museli vzít v úvahu současný pohyb tělesa i Slunce kolem jejich společného hmotného středu (srv. poznámku pod čarou v řešení úlohy 5.) a výsledek by byl poněkud odlišný.

Vzorové řešení úlohy č. 2 (6 bodů)

Částice prachu v kometárním ohonu

Gravitační síla působící na částici prachu je přímo úměrná její hmotnosti. Předpokládáme-li, že částice prachu je kulová, má gravitační síla Slunce, která na ni působí, velikost

$$F_g = G \frac{M_\odot m_p}{R^2} = G \frac{M_\odot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_p}{R^2}, \quad (1)$$

kde m_p je hmotnost prachové částice, r její poloměr, ρ_p hustota a R její vzdálenost od Slunce. Vidíme, že gravitační síla je přímo úměrná třetí mocnině poloměru částice, tj.

$$F_g = Ar^3, \quad \text{kde} \quad A = G \frac{M_\odot \frac{4}{3} \pi \rho_p}{R^2}. \quad (2)$$

Síla tření způsobená slunečním větrem má (podle Stokesova vztahu) velikost

$$F_t = Br^2, \quad (3)$$

kde B je konstanta úměrnosti závislá na vlastnostech prostředí, v němž se částice nachází. Poměr velikosti třecí síly a velikosti gravitační síly je roven

$$\frac{F_t}{F_g} = \frac{B}{A} \frac{1}{r}. \quad (4)$$

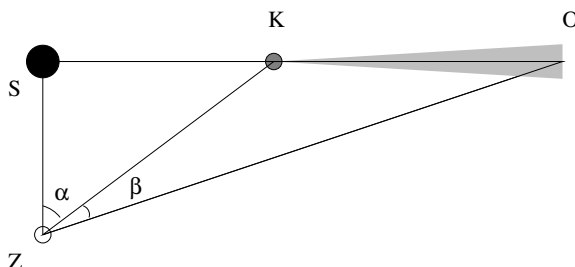
Je zřejmé, že pro dostatečně malé hodnoty poloměru částice prachu je síla tření způsobená slunečním větrem větší než gravitační síla Slunce.

Sluneční vítr (tj. tok elektricky nabitých částic proudících od Slunce) tedy odfoukává malé prachové částice z blízkosti komety a ty pak vytvářejí prachový kometární ohon.

Vzorové řešení úlohy č. 3 (5 bodů)

Délka ohonu komety

Označme S Slunce, K jádro komety, O konec plazmového ohonu a Z Zemi (viz obrázek).



Trojúhelníky ZOS a ZKS jsou pravoúhlé, proto platí

$$|SO| = |ZS| \tan(\alpha + \beta), \quad |SK| = |ZS| \tan \alpha. \quad (1)$$

Odtud dostáváme pro délku ohonu komety

$$|KO| = |SO| - |SK| = |ZS| [\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha] = 1,06 \text{ a. j.} \quad (2)$$

kde 1 a. j. (*astronomická jednotka*) odpovídá střední vzdálenosti Země od Slunce, tj.

$$1 \text{ a. j.} = |ZS| \doteq 150 \cdot 10^6 \text{ km.} \quad (3)$$

Vzorové řešení úlohy č. 4 (6 bodů)

Radioaktivní rozpad v obálce supernov

Hmotnost jednoho atomu uvažovaného izotopu kobaltu je

$$m \doteq 56 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \doteq 9,35 \cdot 10^{-26} \text{ kg}, \quad (1)$$

v jednom kilogramu kobaltu je tedy

$$N_{1\text{kg}} = \frac{1 \text{ kg}}{m} \doteq 1,07 \cdot 10^{25} \text{ atomů.} \quad (2)$$

Z tohoto množství se za jednu sekundu rozpadne

$$\Delta N_{1\text{kg}} = N_{1\text{kg}} - N_{1\text{kg}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1\text{s}}{T}} \doteq 1,10 \cdot 10^{18} \text{ atomů,} \quad (3)$$

kde $T = 77,7$ dne je zadaný poločas rozpadu kobaltu.

Energie uvolněná rozpadem jediného atomu je podle zadání

$$\varepsilon = 3,72 \text{ MeV} \doteq 5,95 \cdot 10^{-13} \text{ J.} \quad (4)$$

Aby byl objasněn zářivý výkon supernov $P \cong 10^{35} \text{ W}$, musí se za jednu sekundu rozpadnout

$$\Delta N = \frac{P}{\varepsilon} \doteq 1,68 \cdot 10^{47} \text{ atomů.} \quad (5)$$

Supernova daného výkonu tedy musí obsahovat celkem

$$N = \frac{\Delta N}{\Delta N_{1\text{kg}}} \doteq 1,53 \cdot 10^{29} \text{ kg} \doteq 0,08 M_{\odot} \text{ kobaltu.} \quad (6)$$

Poznámka: Správněji bychom měli při výpočtu uvažovat místo $t=1 \text{ s}$ velmi krátký časový interval $\Delta t \rightarrow 0$. Protože je ovšem $1 \text{ s} \ll 77,7 \text{ dní}$, je přesnost získaného odhadu dostačující.

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Stabilita dvojhvězdy

Je-li celková energie systému dvou hvězd, které se v dané vztažné soustavě nepohybují a které nejsou gravitačně vázané, tj. jsou velmi vzdálené, nulová (podle zadání), pak celková energie gravitačně vázaného systému je záporná: hvězdám totiž musíme dodat energii k tomu, aby překonaly vzájemné gravitační působení a přestaly být vázané. Podobně je celková energie nevázaného systému nezáporná.

Pro gravitační potenciální energii systému dvou těles o hmotnostech M_1 a M_2 , vzdálených o a , lze odvodit vztah

$$E_p = -G \frac{M_1 M_2}{a}. \quad (1)$$

Celková mechanická energie fyzikálního dvojhvězdného systému je tedy dána vztahem

$$E = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - G \frac{M_1 M_2}{a}, \quad (2)$$

z něž dosazením zadaných vztahů pro rychlosti složek získáme

$$E = -G \frac{M_1 M_2}{2a} < 0. \quad (3)$$

Předpokládejme nyní, že u první hvězdy proběhla sféricko-symetrická exploze, při níž nedošlo ke změně její rychlosti. Pozůstatek první složky po výbuchu nechť má hmotnost $\bar{M}_1$. Platí

$$\bar{M}_1 = M_1 - \Delta \bar{M}, \quad (4)$$

kde jsme jako $\Delta \bar{M}$ označili úbytek hmotnosti hvězdy (tj. hmotnost odvržené látky). Vzhledem ke vztažné soustavě spojené s původním hmotným středem systému se sféricko-symetrická obálka pohybuje rychlostí v_1 , a proto získá hmotný střed³ pozůstatku dvojhvězdy rychlost o velikosti

$$v_0 = \frac{-\bar{M}_1 v_1 + M_2 v_2}{\bar{M}_1 + M_2} = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a}} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{M_1 - \bar{M}_1}{\bar{M}_1 + M_2}. \quad (5)$$

Celkovou energii $\bar{E}$ systému po explozi musíme sledovat právě v soustavě spojené s tímto novým hmotným středem dvojhvězdy. V ní má první složka rychlost o velikosti

$$v'_1 = v_1 + v_0 = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a}} \frac{M_2}{\bar{M}_1 + M_2}, \quad (6)$$

³Hmotný střed systému n hmotných bodů o hmotnostech m_i a polohových vektorech $\vec{r}_i$ je definován jako bod o polohovém vektoru

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Hmotný střed systému má tedy (v dané vztažné soustavě) rychlost

$$\vec{v}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

kde $\vec{v}_i$ je rychlost i – tého hmotného bodu.

druhá složka má rychlost o velikosti

$$v'_2 = v_2 - v_0 = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{a}} \frac{\bar{M}_1}{\bar{M}_1 + M_2}. \quad (7)$$

Pro celkovou energii systému po explozi platí

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\bar{M}_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2}M_2 (v'_2)^2 - G\frac{\bar{M}_1 M_2}{a} = \frac{G\bar{M}_1 M_2}{2a(\bar{M}_1 + M_2)} [M_1 + M_2 - 2(\bar{M}_1 + M_2)]. \quad (8)$$

Aby systém zůstal vázaný, musí být tato energie záporná, proto má podmínka pro zachování dvojhvězdného systému tvar

$$M_1 - M_2 < 2\bar{M}_1. \quad (9)$$

Protože spočtené rychlosti pohybu hvězd v'_1 a v'_2 neodpovídají rychlostem pro kruhovou dráhu (srv. zadání úlohy), dráha hvězd po explozi nezůstává kruhovou.