

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

9. ročník — 2002/2003

Vzorové řešení první série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (7 bodů)

Voda

Z daných předpokladů plyne, že energetický potenciál vodních toků $\langle E \rangle$ v ČR můžeme počítat jako rozdíl potenciálních energií vody mezi místem, kde voda napršela, a místem, kde opouští naše území. Můžeme tedy psát

$$\langle E \rangle = mg\langle h \rangle,$$

kde m je celková hmotnost vody, g tíhové zrychlení a $\langle h \rangle$ střední hodnota převýšení povrchu ČR nad ústím řek z našeho území¹.

Za čas Δt odteče z našeho území hmotnost vody m , kterou lze určit ze vztahu

$$m = (Q_{Labe} + Q_{Morava} + Q_{Odra})\rho\Delta t,$$

kde Q_{Labe} , Q_{Morava} a Q_{Odra} jsou průtoky při ústí odpovídajících řek a ρ je hustota vody. Střední převýšení $\langle h \rangle$ (tedy rozdíl mezi průměrnou nadmořskou výškou ČR a průměrnou výškou ústí řek) je přibližně rovno 350 m. Teoretický výkon vodních zdrojů na našem území určíme jako²

¹V tomto případě můžeme počítat střední hodnotu energie ze střední hodnoty jiné veličiny – převýšení, obecně to ale nelze. Bližší informace najdete v zadání a řešení prémiové úlohy.

²Přesnější postup by byl, kdybychom počítali každé povodí zvlášť. Různá povodí mají při odlišných koncových průtocích jiná převýšení. Příspěvky jednotlivých povodí pak sečteme, tedy

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \langle P \rangle_{Labe} + \langle P \rangle_{Morava} + \langle P \rangle_{Odra} = \\ &= (Q_{Labe}\langle h \rangle_{Labe} + Q_{Morava}\langle h \rangle_{Morava} + Q_{Odra}\langle h \rangle_{Odra})\rho g.\end{aligned}$$

Někteří z vás to takto počítali a my si od jednoho půjčíme i geografické údaje. Byl tak pečlivý, že je zjistil na Hydrometeorologickém ústavu, a tak získal lepší data, než jsme měli k dispozici my. Děkujeme mu za to.

Povodí	střední průtok (m^3s^{-1})	střední nadm. výška (m)	nadm. výška u ústí (m)
Labe	311	454	117
Morava	108	400	148
Odra	62	578	200

$$\langle P \rangle = \frac{\langle E \rangle}{\Delta t} = (Q_{Labe} + Q_{Morava} + Q_{Odra}) \rho g \langle h \rangle.$$

Po dosazení hodnot ze zadání

$$\langle P \rangle = (308 + 120 + 60) \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 350 \text{ W} \doteq 1700 \text{ MW},$$

což odpovídá roční produkci asi 15 000 GWh (gigawatthodin³).

Vidíme, že náš odhad vedl k číslu asi 10× většímu, než je reálný potenciál vodních zdrojů (tj. než by byla výroba energie, kdybychom postavili malé vodní elektrárny všude tam, kde je to vhodné a únosné). Zcela jistě je iluzí využít většinu potenciální energie vody. Zvláště v počátečních úsecích vodních toků v horských oblastech voda strmě překonává značné převýšení v tisících malých potůčků a její energie se nevyužitelně ztrácí.

Je třeba poznamenat, že jsme při výpočtu ignorovali fakt, že nelze přeměnit mechanickou energii na energii elektrickou se 100% účinností. Účinnost přeměny je však poměrně vysoká (cca 90%) a její nezohlednění nijak významně náš hrubý odhad neovlivní.

A ještě máme pro vás jedno opravdu důležité sdělení. Snažili jsme se pouze o odhad a dosazovali jsme jen velmi přibližná čísla. Například jsme vůbec nebrali v úvahu, že v různých místech mohou být dešťové srážky různé. Pokud počítáme s nepřesnými daty, nemůžeme získat přesné výsledky. Výsledné hodnoty je tedy třeba zaokrouhlit jen na malý počet platných čísel, cca na dvě. Nemá tedy žádný smysl psát například 15 364,458, ale zaokrouhlíme je na 15 000.

Vzorové řešení úlohy č. 2 (8 bodů)

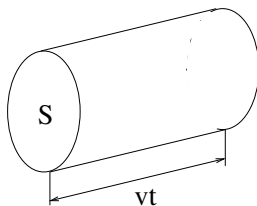
Vítr

Předpokládejme nejprve, že větrná elektrárna je schopna přeměnit veškerou kinetickou energii větru na energii elektrickou. Kinetickou energii vypočteme podle známého vztahu

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde je třeba pouze určit hmotnost vzduchu m , který při rychlosti větru v projde plochou vrtule S za čas t . K tomu můžeme použít následující úvahu: za čas t projde plochou vrtule objem válce s podstavou S a výškou vt (viz obrázek). Hmotnost pak určíme jako

$$m = Svt\rho.$$



³1Wh=3600J. Zde i na jiných místech budeme někdy používat nesoustavné jednotky – kWh, ha apod. I když nepatří do soustavy SI, jsou v energetice i občanském životě často používány a je tedy třeba je znát a umět používat.

Pro výkon "dokonalé" větrné elektrárny dostaneme již jednoduše

$$P = \frac{E_k}{t} = \frac{1}{8}\pi d^2 \rho v^3,$$

kde jsme navíc použili známý vztah pro plochu kruhu o průměru d .

Náš výchozí předpoklad o úplné přeměně energie větru na energii elektrickou nemůže žádná větrná elektrárna splnit. Reálné vlastnosti vystihuje účinnost elektrárny, která v optimálním případě dosahuje asi 40% . Odtud tedy koeficient 0,4 ve vztahu ze zadání.

Vzorové řešení úlohy č. 3 (5 bodů)

Biomasa

Zavedme nejprve následující označení:

m – hmotnost dřevní hmoty za 1 rok z 1 ha (1 hektar = 10 000 m²)

ν – výhřevnost dřeva

η – účinnost tepelné elektrárny

S – potřebná plocha lesa v ha

E – vyrobená energie.

Z jednoduché úvahy plyne, že

$$E = Sm\nu\eta,$$

odtud

$$S = \frac{E}{m\nu\eta}.$$

Pro výpočet plochy potřebné k pokrytí výroby EDU dostaneme číselně

$$S = \frac{13593 \cdot 10^9 \cdot 3600}{4000 \cdot 19 \cdot 10^6 \cdot 0,35} \text{ ha} \doteq 1,8 \cdot 10^6 \text{ ha} = 18000 \text{ km}^2,$$

pro celkovou spotřebu elektrické energie v ČR

$$S = \frac{50000 \cdot 10^9 \cdot 3600}{4000 \cdot 19 \cdot 10^6 \cdot 0,35} \text{ ha} \doteq 6,8 \cdot 10^6 \text{ ha} = 68000 \text{ km}^2.$$

Poznámka: Zde se bohužel do zadání vloudila chyba, za kterou se omlouváme. V ČR nemáme 27 700 ha, ale 27 700 km² lesa (třetina území státu). Radost nám udělali ti, kteří si nesmyslného údaje všimli. Je vidět, že vztahy a čísla pro vás nejsou jen prázdnými symboly.

Vzorové řešení úlohy č. 4 (5 bodů)

Slunce

Známe-li zářivý výkon zdroje, vztažený na jednotku plochy v určité vzdálenosti od zdroje (tedy intenzitu záření I), určíme celkovou energii, která za čas t dopadne na plochu S , podle vztahu⁴

⁴I když je Země koule, má zemský kotouč tvar kruhu. Na Zemi tedy dopadá právě taková energie, jaká by dopadala na plochý kruh postavený kolmo ke světelným paprskům. Povrch zemské polokoule je sice větší, než povrch kruhu stejného poloměru, ale zase na většinu zemského povrchu dopadá světlo šikmo, po nenulovém úhlem.

$$E = ISt = I\pi r^2 t,$$

pokud plocha S je kruh o poloměru r . Pro roční energetický zisk ze Slunce dostaneme číselně

$$E = 1326 \cdot 3,14 \cdot (6378 \cdot 10^3)^2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ J} \doteq 5,3 \cdot 10^{24} \text{ J}.$$

Celková výroba energie na Zemi je $100 \text{ PWh} = 3,6 \cdot 10^{20} \text{ J}$ ("P" je předpona "peta", která určuje koeficient 10^{15}). Vidíme tedy, že člověk vyrábí jen asi 0,007% energie, kterou planeta Země "dostane" ze Slunce. Samotný fakt nadbytečné produkce energie nemůže mít žádný globální efekt a s možnými klimatickými změnami nesouvisí. Člověk může změnit střední teplotu Země jen tak, že změni její odrazivost pro elektromagnetické záření (například změnou složení atmosféry nebo změnou "barvy" podstatné části povrchu). Bohužel je jisté, že takto činí a zatím nedokážeme dohlédnout, jaké důsledky, negativní nebo i pozitivní, tato činnost bude mít.

Elektrickou energii, kterou jsme schopni vyrobit pomocí plochy S solárních článků, vypočteme jako

$$E = wS\eta,$$

kde w je energie dopadající na 1 m^2 za daný čas (1 rok) a η účinnost přeměny energie. Odtud jednoduše

$$S = \frac{E}{w\eta} = \frac{50000 \cdot 10^9 (\text{Wh})}{1000 \cdot 10^3 (\text{Wh/m}^2) \cdot 0,15} = 330 \text{ km}^2.$$

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Ještě jednou vítr

- (a) Střední hodnotu počítáme jako aritmetický průměr. Máme-li tedy například množinu čísel $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n$, pak je střední hodnota rovna

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{n}.$$

Pokud by byl výkon větrné elektrárny přímo úměrný rychlosti větru

$$P = kv,$$

kde k je konstanta úměrnosti, pak bychom mohli střední hodnotu výkonu počítat

$$\langle P \rangle = \langle kv \rangle = \frac{kv_1 + kv_2 + kv_3 + \dots + kv_n}{n} = k \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{n} = k \langle v \rangle,$$

čímž je požadované tvrzení dokázáno.

(b) Analogicky jako v předchozím případě

$$P = kv^3,$$

$$\langle P \rangle = \langle kv^3 \rangle = \frac{kv_1^3 + kv_2^3 + kv_3^3 + \dots + kv_n^3}{n} = k \frac{v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 + \dots + v_n^3}{n} = k \langle v^3 \rangle,$$

ale

$$\langle v \rangle^3 = \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{n} \right)^3 \neq \langle v^3 \rangle.$$

Nerovnost $\langle v \rangle^3 \neq \langle v^3 \rangle$ si můžeme ukázat i na nějakém konkrétním číselném příkladě. Například

v	v^3
3	27
5	125
4	64
5	125
7	343

Prostým sečtením čísel ve sloupcích a dělením pěti dostaneme $\langle v \rangle = 4,3$, tedy $\langle v \rangle^3 = 110,6$, ale $\langle v^3 \rangle = 136,8$. Zde je dobře vidět, jak jedno větší číslo – 7 – výrazně ovlivní střední hodnotu $\langle v^3 \rangle$. Jeho příspěvek je větší než příspěvek všech ostatních čísel dohromady.

- (c) Tento úkol je skutečně obtížný a ti z vás, kteří jej úspěšně zvládli, mohou být skutečně hrdi, protože jejich fyzikální a matematická zdatnost vysoko převyšuje středoškolský standard. Na tomto místě jen stručněji popíšeme řešení s tím, že plné pochopení vyžaduje pokročilejší matematické studium.

Nechť $P(v)$ je funkce náhodné proměnné v , která se řídí rozdělením $f(v)$. Střední hodnotu $\langle P \rangle$ funkce $P(v)$ pak vypočteme jako

$$\langle P \rangle = \int_D P(v) f(v) dv,$$

kde D je definiční obor rozdělení $f(v)$. Pro výkon větrné elektrárny s Rayleighovým rozdělením rychlosti větru dostaneme

$$\langle P \rangle = \int_0^\infty 0,4 \frac{\pi}{8} d^2 \rho v^3 \frac{2}{\eta} \left(\frac{v}{\eta} \right) e^{-\left(\frac{v}{\eta} \right)^2} dv.$$

Po úpravě

$$\langle P \rangle = 0,4 \frac{\pi}{8} d^2 \rho \frac{2}{\eta^2} \int_0^\infty v^4 e^{-\left(\frac{v}{\eta} \right)^2} dv.$$

Integrál není analyticky řešitelný, nicméně hodnota určitého integrálu v nevlastních mezích je známa a je rovna (viz. např. K. Rektorys, Přehled užití matematiky)

$$\int_0^\infty v^4 e^{-\left(\frac{v}{\eta}\right)^2} dv = \frac{3\sqrt{\pi}\eta^5}{8}.$$

Dosazením dostaneme

$$\langle P \rangle = 0,4 \frac{\pi}{8} d^2 \rho \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \eta^3,$$

kde

$$\eta \doteq \frac{\langle v \rangle}{0.886}.$$

Po číselném výpočtu pro $\langle v \rangle = 5\text{m/s}$, $d = 50\text{m}$ a $\rho = 1,3\text{kg/m}^3$ máme

$$\langle P \rangle \doteq 122\text{kW}.$$

Tak jsme získali střední výkon větrné elektrárny, který za 1 rok provozu zajistí výrobu asi 1GWh elektrické energie. Pokud by po celý rok vál vítr konstantní rychlostí $v = 5\text{m/s}$, stálý výkon větrné elektrárny spočítaný prostým dosazením do vztahu z úlohy č. 2 vyjde přibližně 64kW a odpovídající roční výroba asi 0,56GWh. Kubická závislost výkonu elektrárny spolu s Rayleighovým rozdělením rychlosti větru vede asi k dvojnásobné hodnotě energie ve srovnání s hodnotou získanou dosazením střední rychlosti větru do vztahu pro výkon.

Jak jsme na tom s větrem v ČR? Na většině území je průměrná rychlost větru asi 4m/s, hodnotu 6m/s přesahuje pouze v horských oblastech, zejména na západě naší republiky. Můžeme tedy odhadnout, že pro výrobu stejného množství energie jako EDU bychom potřebovali cca 10 000 velkých větrných elektráren. Nejde jen o to najít pro ně vhodnou lokalitu a postavit je. Je také třeba vyrovnat se s jejich nepravidelným výkonem, tedy zajistit pohotovost dalších energetických kapacit, které za nepříznivých podmínek větrné elektrárny nahradí.

A co říci závěrem? Je zřejmé, že alternativní, obnovitelné zdroje energie nemají a stěží někdy v budoucnosti budou mít potenciál plně zásobovat lidstvo potřebnou energií s výjimkou případu, kdy se člověk pod úderem nějaké apokalypsy vrátí zpět do doby kamenné nebo do středověku a počet obyvatel Země klesne na zlomeček dnešní hodnoty. To ovšem neznamená, že by se lidé neměli pokoušet obnovitelné zdroje využívat všude tam, kde je to ekonomicky, ale i ekologicky únosné.

Autor této série úloh je přesvědčen, že budoucnost civilizace je podmíněna rozvojem špičkových technologií, které jediné mají šanci zajistit dostatek energie, potravy a surovin, ale také v dostatečné míře eliminovat neblahé důsledky přítomnosti a expanze člověka na planetě Zemi.