

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

9. ročník — 2002/2003

Vzorové řešení druhé série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (6 bodů)

Stavba májky

Aby se májka zvedala, musí být moment tahové síly lana $\vec{F}$ vzhledem k ose otáčení větší než moment tíhové síly $\vec{F}_G = m\vec{g}$. Osa otáčení přitom prochází bodem dotyku májky se zemí. Podmínka rovnováhy momentů sil vzhledem k této ose má tvar

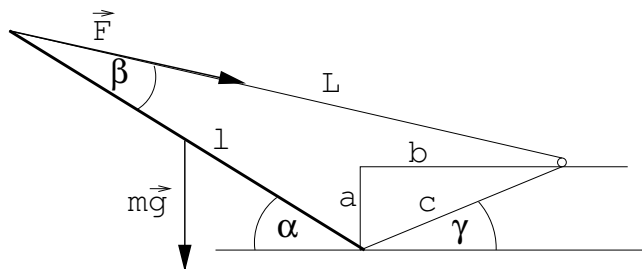
$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha = Fl \sin \beta, \quad (1)$$

kde β je úhel, který svírá tažné lano s májkou (obrázek 1). Označme dále γ úhel, který svírá úsečka o délce $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ s vodorovnou rovinou. Užitím sinové věty dostáváme

$$\frac{L}{\sin(\pi - \gamma - \alpha)} = \frac{c}{\sin \beta} \implies \sin \beta = \frac{c \sin(\pi - \alpha - \gamma)}{L}, \quad (2)$$

délku L vyjádříme prostřednictvím kosinové věty vztahem

$$L = \sqrt{l^2 + c^2 - 2lc \cos(\pi - \alpha - \gamma)}. \quad (3)$$



Obrázek 1

Úpravou rovnic (1) – (3) a dosazením za c vychází

$$\cos \alpha = \frac{2F}{mg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\pi - \alpha - \gamma)}{\sqrt{l^2 + a^2 + b^2 - 2l\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\pi - \alpha - \gamma)}}. \quad (4)$$

Z této rovnice již vypočteme (např. numericky nebo užitím vhodného počítačového programu) hledaný úhel α . Dosazením zadaných hodnot vychází

$$\tan \gamma = \frac{a}{b} \implies \gamma \doteq 16,7^\circ$$

a

$$\alpha \doteq 33,5^\circ.$$

Z rovnice (1) je patrné, že pro $\alpha \geq 33,5^\circ$ je tahová síla lana vždy menší než její maximální přípustná hodnota.

Poznámka: Oceňujeme tvůrčí přístup k řešení úlohy. Je vidět, že práce s počítači a grafy vám není cizí.

Vzorové řešení úlohy č. 2 (6 bodů)

Vzduchoplavec

Nejprve se podívejme na model, který pro fyzikální popis balónu použijeme. Jak každý určitě ví, balón letí díky tomu, že uvnitř je horký vzduch, který má nižší hustotu než vzduch vně. Pro náš odhad vyjdeme z předpokladu, že vzduch uvnitř balónu je v rovnovážném stavu, tzn. má všude stejný tlak a teplotu. Můžeme pro něj tedy použít stavovou rovnici

$$pV = nkT. \quad (1)$$

Kdyby vzduch v balónu nebyl ohříván, měl by stejnou teplotu jako okolí, tj. -3° . Po zažehnutí hořáků se však vzduch uvnitř balónu rozpíná a přebytečný vzduch uniká ven až do ustavení rovnováhy. Tlak v balónu je potom zřejmě roven okolnímu tlaku (v opačném případě by totiž docházelo k proudění vzduchu z balónu nebo do balónu). Objem balónu lze rovněž považovat za konstantní, proto

$$nkT = \text{Konst}. \quad (2)$$

Vynásobíme-li nyní tento vztah molární hmotností plynu a vydělíme objemem, máme $\rho T = \text{konst}$, neboli

$$\rho_{\text{uvnitř}} T_{\text{uvnitř}} = \rho_{\text{venku}} T_{\text{venku}}. \quad (3)$$

Ted' už jen porovnáme velikost vztlakové a tíhové síly působící na balón:

$$F_{\text{vztlaková}} = F_{\text{tíhová}}, \quad \text{tj.} \quad V \rho_{\text{venku}} g = mg + V \rho_{\text{uvnitř}} g. \quad (4)$$

Ze vztahů (3) a (4) vychází pro teplotu vzduchu uvnitř balónu

$$T_{\text{uvnitř}} = T_{\text{venku}} \frac{\rho_{\text{venku}}}{\rho_{\text{venku}} - \frac{m}{V}}. \quad (5)$$

Užitím MFChT odhadneme, že $\rho_{\text{venku}} \doteq 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, teplotu dosadíme v kelvinech. Zadaná vnější teplota je 270 K, teplota vzduchu uvnitř balónu je tedy 350 K, tj. přibližně 80°C. V našem balónu by se proto vzduchoplavec ohřál, a to až příliš. Navíc by se nejspíš přiotrávil oxidem uhelnatým z hořáků. Proto pro něj bude lepší zůstat v koši.

Závěrem dodejme, že vzduchoplavec necítí foukat vítr, protože jeho balón se pohybuje spolu s okolním vzduchem.

Poznámka: Někteří z vás použili při řešení úlohy vztahu z MFChT pro hustotu suchého vzduchu ρ při tlaku p a teplotě t (zadané ve stupních Celsia)

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} \frac{p}{p_0},$$

kde $\rho_0 = 1,276 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ a $\gamma = 0,00366 \text{ K}^{-1}$. Přesvědčte se, že tento vztah je důsledkem stavové rovnice plynu.

Vzorové řešení úlohy č. 3 (5 bodů)

Hrábě

Nejprve si udělejme jasno v označení: m bude hmotnost hrábí, M hmotnost experimentátora, l délka násady hrábí, d délka hrabacích hřebů a h výška experimentátora.

K řešení úlohy použijeme zákona zachování mechanické energie. Hladinu nulové tíhové potenciální energie zvolíme tak, aby byla potenciální energie volně ležících hrábí nulová. Před uvolněním hrábí pak bude energie soustavy „hrábě+experimentátor stojící na hřebec“ rovna potenciální energii experimentátora, tedy $Mg \left(d + \frac{h}{2}\right)$.

Označme ω úhlovou rychlost hrábí v okamžiku, kdy dopadají na nos experimentátora. Násada hrábí má kinetickou energii

$$\frac{1}{2}J\omega^2, \quad J = \frac{1}{3}ml^2, \quad (1)$$

kde J je moment setrvačnosti násady vzhledem k ose k ní kolmé procházející jejím krajním bodem. Potenciální energie násady je v tomto okamžiku $mg\frac{l}{2}$. Experimentátor má potenciální energii $Mg\frac{h}{2}$, nesmíme ale zapomenout, že má také energii kinetickou. Pohybuje se totiž na hrabacích hřebec, které se, stejně jako každá jiná část hrábí, otáčejí úhlovou rychlostí ω . V okamžiku, kdy mu hrábě narážejí na nos, se experimentátor pohybuje rychlostí $d\omega$ a jeho kinetická energie je

$$\frac{1}{2}Md^2\omega^2. \quad (2)$$

Rovnice, která vyjadřuje zákon zachování mechanické energie soustavy „hrábě+experimentátor“, má tedy tvar

$$Mg \left(d + \frac{h}{2}\right) = mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2\omega^2 + Mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}Md^2\omega^2, \quad (3)$$

jehož úpravou dostaneme

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd - mg\frac{l}{2}}{\frac{1}{6}ml^2 + \frac{1}{2}Md^2}} = \sqrt{\frac{3g(2Md - ml)}{ml^2 + 3Md^2}}. \quad (4)$$

Po dosazení číselných hodnot vychází $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$. Rychlost libovolného bodu hrábí je rovna součinu úhlové rychlosti a vzdálenosti od osy otáčení. Proto bod, který je ve výši experimentátorova nosu, má rychlost $\omega \cdot 1,8 \text{ m} = 18 \text{ m.s}^{-1}$.

Vzorové řešení úlohy č. 4 (8 bodů)

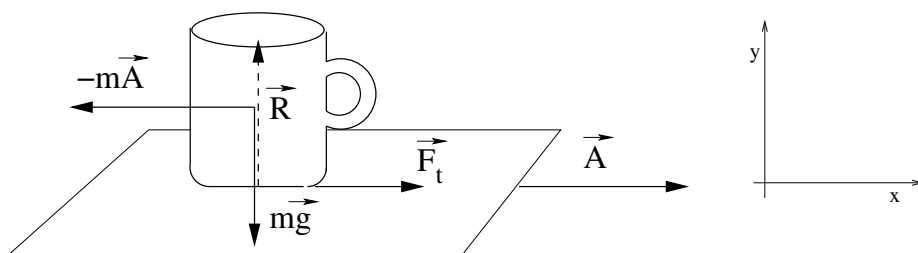
Z lepší společnosti

Pokud jste si pokus sami vyzkoušeli, víte, že je třeba papír zpod hrnku co nejrychleji „vyškubnout“. Co to znamená fyzikálně? Podívejme se na pohyb hrnku z hlediska soustavy spojené s papírem. Trhnutím udělujeme papíru vůči stolu nenulové zrychlení $\vec{A}$. Vztahná soustava spojená s papírem je tedy neinerciální a pohybová rovnice hrnku má tvar

$$m\vec{a}_p = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_t + \vec{F}^*, \quad (1)$$

kde m je hmotnost hrnku, $\vec{a}_p$ je zrychlení hrnku vůči papíru, $\vec{F}_t$ je třecí síla a $\vec{F}^*$ je setrvačná síla (obrázek 2). Protože se hrnek ve směru osy y nepohybuje, platí

$$R = mg. \quad (2)$$



Obrázek 2

Pokud je hrnek vůči papíru v klidu ($\vec{a}_p = \vec{0}$), plyne z pohybové rovnice (1) pro velikost (statické) třecí síly

$$F_{t,s} = mA. \quad (3)$$

Bude-li se velikost zrychlení papíru zvětšovat, poroste i velikost statické třecí síly, a to až do maximální možné hodnoty, která je dána vztahem

$$F_{t,s,max} = Rf_0 = mgf_0, \quad (4)$$

kde f_0 je koeficient statického tření. Po překročení této hodnoty je třecí síla dynamickou třecí silou, má stálou velikost $F_{t,d} = Rf$, kde f je koeficient dynamického tření, a hrnek se vůči papíru pohybuje se zrychlením o velikosti

$$a_p = -A + \frac{Rf}{m} = -A + gf. \quad (5)$$

V soustavě spojené se stolem má potom pohybová rovnice hrnku tvar

$$m\vec{a}_s = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{t,d}, \quad (6)$$

z něž pro velikost zrychlení hrnku vůči stolu plyne

$$a_s = \frac{Rf}{m} = gf. \quad (7)$$

Abychom tedy papír zpod hrnku vytáhli, musíme papíru udělit zrychlení $A > gf_0$. Když navíc pro toto zrychlení bude platit $A \gg gf$, při vytažení papíru zpod hrnku posun hrnku vůči stolu stěží postřehneme. Tak je tomu i v případě vretieného umělce a prostřeného stolu.

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

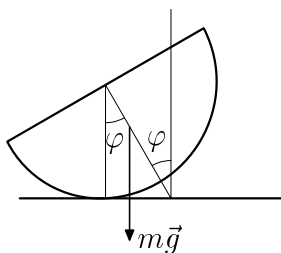
Led v PET láhvi

Nejprve provedeme teoretický rozbor situace. Děj, který pozorujeme, jsou tlumené kmity fyzického kyvadla. Úlohu však pro jednoduchost budeme řešit při zanedbání tlumení a dále za předpokladu malých výchylek kyvadla. O kyvadle budeme předpokládat, že je homogenní. Označme σ plošnou hustotu průřezu kyvadla, tj. $\sigma = \varrho l$, kde ϱ je hustota (v našem případě) ledu a l je délka láhve (válcové nádoby), v níž jsme vodu mrazili.

Vyřešme úlohu nejprve pro výšky úseče $h = R$ a $h = 2R$.

Pro $h = 2R$ je kyvadlem válec. Ten je samozřejmě pro libovolné natočení ve stabilní poloze, a proto k žádným kmitům nedojde, tj. $\omega(2R) = 0 \text{ s}^{-1}$.

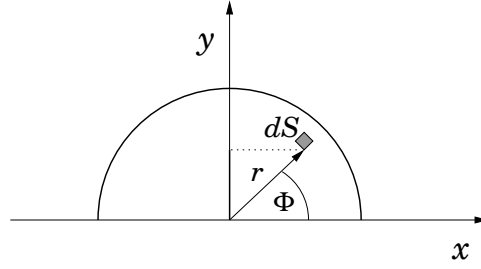
Zajímavější situace nastává pro $h = R$, tedy pro půlválec. Za souřadnici popisující polohu kyvadla zvolme úhel φ (obrázek 3).



Obrázek 3

Vypočteme nejprve vzdálenost těžiště (tj. středu hmotnosti) r_T kyvadla od osy láhve. Výpočet provedeme v polárních souřadnicích $[r, \phi]$ (obrázek 4). Platí:

$$r_T = \frac{\int_{(V)} (r \sin \phi) \varrho dV}{m} = \frac{\int_{(S)} (r \sin \phi) \sigma dS}{m} = \frac{1}{m} \sigma \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \phi dr d\phi = \frac{\sigma}{m} \frac{2}{3} R^3. \quad (1)$$



Obrázek 4

Moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose symetrie láhve je dán vztahem

$$J = \int_{(V)} r^2 \varrho dV = \int_{(S)} r^2 \sigma dS = \sigma \int_0^\pi \int_0^R r^3 dr d\phi = \frac{1}{4} \sigma \pi R^4. \quad (2)$$

Je důležité uvědomit si, kolem které osy se bude kyvadlo otáčet – je to právě místo dotyku s podložkou. Moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k této ose je podle Steinerovy věty

$$J_0 = J + mR^2 = \frac{1}{4} \sigma \pi R^4 + \frac{1}{2} \sigma \pi R^4 = \frac{3}{4} \sigma \pi R^4. \quad (3)$$

Pohybová rovnice kyvadla má tvar

$$\vec{M} = J_0 \vec{\varepsilon}, \quad (4)$$

kde $\vec{M}$ je moment tíhové síly vzhledem k bodu dotyku s podložkou a $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení kyvadla, skalárně tedy

$$-mgr_T \sin \varphi = \frac{3}{4} \sigma \pi R^4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (5)$$

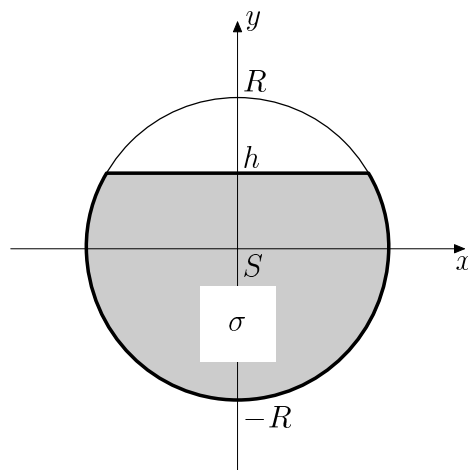
Po dosazení za r_T a po úpravě dostáváme

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{8g}{9\pi R} \varphi = 0, \quad (6)$$

kde jsme využili předpokladu malých výchylek $\sin \varphi \approx \varphi$. Získali jsme tak rovnici netlumeného harmonického oscilátoru. Koeficient u φ je druhou mocninou úhlové frekvence malých netlumených kmitů, tj.

$$\omega(R) = \sqrt{\frac{8g}{9\pi R}}. \quad (7)$$

Nyní přistoupíme k obecnému řešení úlohy. Pro výpočet veličin popisujících homogenní kyvadlo zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem v ose láhve, v níž se voda mrazila (obrázek 5).



Obrázek 5

- Výpočet momentu setrvačnosti kyvadla:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{(V)} r^2 \varrho \, dV \\
 &= \int_{(S)} r^2 \sigma \, dS \\
 &= \int_{-R}^{h-R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sigma (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\
 &= \frac{2\sigma}{3} \int_{-R}^{h-R} (R^2 + 2y^2) \sqrt{R^2 - y^2} \, dy \\
 &= \frac{2\sigma}{3} \left(R^2 \int_{-R}^{h-R} \sqrt{R^2 - y^2} \, dy + 2 \int_{-R}^{h-R} y^2 \sqrt{R^2 - y^2} \, dy \right). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Počítejme každý z integrálů samostatně. Použijeme-li substituci $y = R \sin t$, je $dy = R \cos t \, dt$ a pro první z nich dostáváme:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{R^2 - y^2} \, dy &= R^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt \\
 &= R^2 \int \cos^2 t \, dt \\
 &= R^2 \int \left(\frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \right) dt \\
 &= R^2 \left(\frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t \right) \\
 &= R^2 \left(\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(R \sin t \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} + R^2 t \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(y \sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \arcsin \frac{y}{R} \right). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Nyní vyřešíme druhý integrál. Použijeme stejnou substituci jako v předchozím výpočtu:

$$\int y^2 \sqrt{R^2 - y^2} \, dy = R^4 \int \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt$$

$$\begin{aligned}
&= R^4 \int \sin^2 t \cos^2 t \, dt \\
&= \frac{R^4}{4} \int (2 \sin t \cos t)^2 \, dt \\
&= \frac{R^4}{4} \int \sin^2 2t \, dt \\
&= \frac{R^4}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t \right) \, dt \\
&= \frac{R^4}{4} \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \sin 4t \right) \\
&= \frac{R^4}{8} t - \frac{R^4}{16} \sin 2t \cos 2t \\
&= \frac{R^4}{8} t - \frac{R^4}{8} \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t) \\
&= \frac{R^4}{8} t - \frac{1}{8} R \sin t \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} (R^2 - 2R^2 \sin^2 t) \\
&= \frac{R^4}{8} \arcsin \frac{y}{R} - \frac{1}{8} y \sqrt{R^2 - y^2} (R^2 - 2y^2). \tag{10}
\end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{2}{3} \sigma \left(R^2 \left[\frac{1}{2} \left(y \sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \arcsin \frac{y}{R} \right) \right]_{-R}^{h-R} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[\frac{R^4}{8} \arcsin \frac{y}{R} - \frac{1}{8} y \sqrt{R^2 - y^2} (R^2 - 2y^2) \right]_{-R}^{h-R} \right) \\
&= \frac{\sigma}{2} R^2 (h - R) \sqrt{2hR - h^2} - \frac{\sigma}{3} (h - R) (2hR - h^2)^{3/2} + \\
&\quad + \frac{\sigma}{2} R^4 \arcsin \frac{h - R}{R} + \frac{\sigma}{4} R^4 \pi. \tag{11}
\end{aligned}$$

Opět provedeme korekci Steinerovou větou na skutečnou osu, kolem které se kyvadlo otáčí. K tomu potřebujeme vyjádřit hmotnost kyvadla:

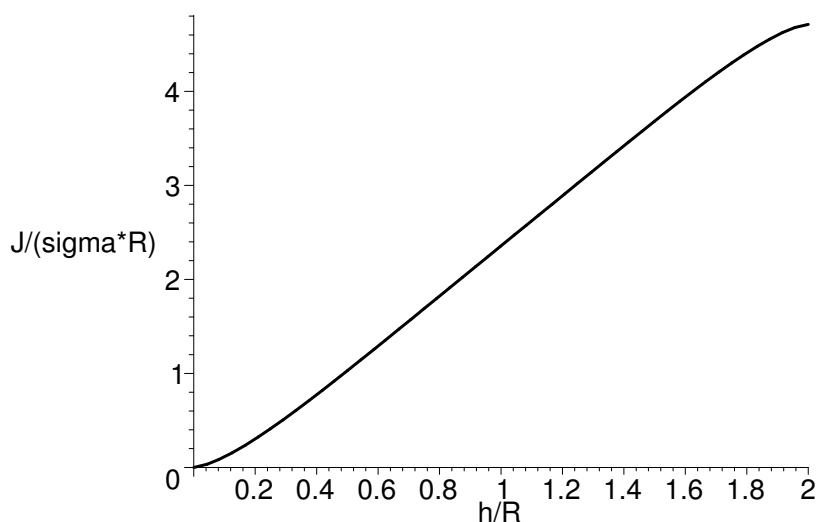
$$\begin{aligned}
m &= \int_{(V)} \varrho \, dV \\
&= \sigma \int_{-R}^{h-R} \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} dx \, dy \\
&= 2\sigma \int_{-R}^{h-R} \sqrt{R^2 - y^2} \, dy \\
&= 2\sigma \frac{1}{2} \left[y \sqrt{R^2 - y^2} + R^2 \arcsin \frac{y}{R} \right]_{-R}^{h-R} \\
&= \sigma \left((h - R) \sqrt{2hR - h^2} + R^2 \arcsin \frac{h - R}{R} + R^2 \frac{\pi}{2} \right), \tag{12}
\end{aligned}$$

kde jsme využili již dříve vypočteného integrálu. Moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k okamžité ose otáčení je tedy

$$\begin{aligned}
J_0 &= J + mR^2 \\
&= \frac{3}{2} \sigma R^2 (h - R) \sqrt{2hR - h^2} - \frac{\sigma}{3} (h - R) (2hR - h^2)^{3/2} + \frac{3}{2} \sigma R^4 \arcsin \frac{h - R}{R} + \frac{3}{4} \sigma R^4 \pi. \tag{13}
\end{aligned}$$

Poznámka: Výsledky uvádíme ve stejném tvaru, do kterého je upraví program na symbolické výpočty Maple.

Závislost momentu setrvačnosti na výšce úseče h je znázorněna na následujícím grafu:



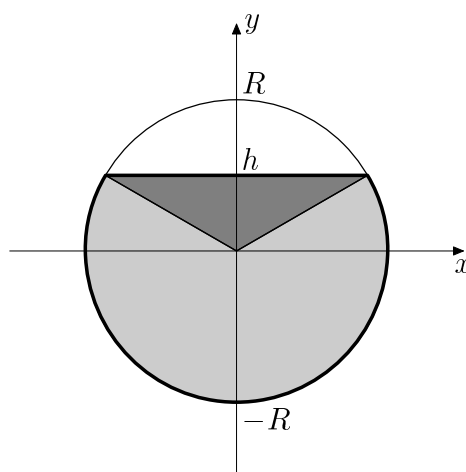
Pohybová rovnice kyvadla má tvar

$$\vec{M} = J_0 \vec{\varepsilon}, \quad (14)$$

tedy

$$-mgr_T \sin \varphi = J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \implies \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{gmr_T}{J_0} \varphi = 0, \quad (15)$$

kde jsme opět užili aproximace malých výchylek $\sin \varphi \approx \varphi$. Koeficient u φ je druhou mocninou úhlové frekvence malých netlumených kmitů kyvadla. K jejímu vyjádření nám zbývá vypočítat výraz mr_T . K tomu rozdělíme průřez kyvadlem na kruhovou výseč a na trojúhelník (obrázek 6).



Obrázek 6

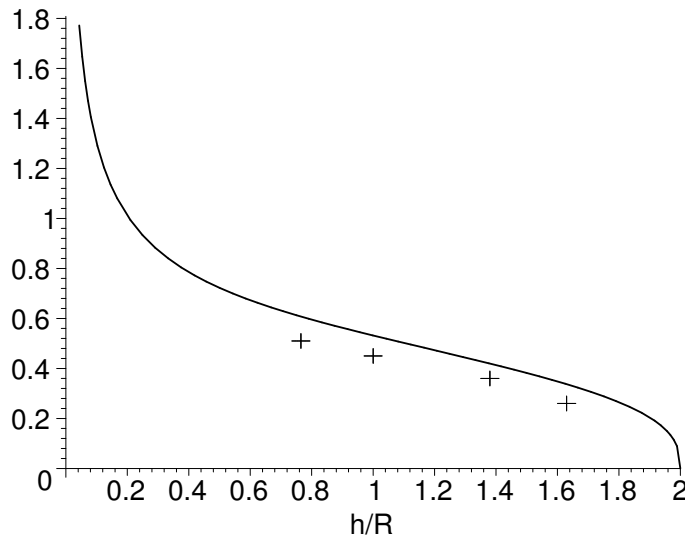
Víme, že těžiště trojúhelníku leží na těžnici ve vzdálenosti $\frac{2}{3}$ délky těžnice od vrcholu, ze kterého příslušná těžnice vychází. Proto (opět v polárních souřadnicích)

$$\begin{aligned}
 mr_T &= m \frac{\int_{(V)} (r \sin \phi) \varrho dV}{m} \\
 &= m \frac{\int_{(S)} (r \sin \phi) \sigma dS}{m} \\
 &= 2\sigma \int_0^R \int_{\arcsin \frac{h-R}{R}}^{-\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \phi d\phi dr - \sigma \frac{2}{3} (h-R) \sqrt{R^2 - (h-R)^2} (h-R) \\
 &= \frac{2}{3} \sigma R^3 \cos \arcsin \frac{h-R}{R} - \frac{2}{3} \sigma (h-R)^2 \sqrt{2hR - h^2} \\
 &= \frac{2}{3} \sigma R^3 \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin \frac{h-R}{R}} - \frac{2}{3} \sigma (h-R)^2 \sqrt{2hR - h^2} \\
 &= \frac{2}{3} \sigma R^3 \sqrt{1 - \left(\frac{h-R}{R} \right)^2} - \frac{2}{3} \sigma (h-R)^2 \sqrt{2hR - h^2} \\
 &= \frac{2}{3} \sigma (2hR - h^2)^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Výsledný vztah pro úhlovou frekvenci kmitů tedy je tedy

$$\omega(R) = \sqrt{g \frac{\frac{2}{3} (2hR - h^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} R^2 (h-R) \sqrt{2hR - h^2} - \frac{1}{3} (h-R) (2hR - h^2)^{3/2} + \frac{3}{2} R^4 \arcsin \frac{h-R}{R} + \frac{3}{4} R^4 \pi}}. \tag{17}$$

Závislost úhlové frekvence kmitů na výšce úseče h je znázorněna na následujícím grafu (na svislé ose jsou vyneseny hodnoty výrazu $\omega \sqrt{R/g}$):



Pro ověření teoretických výsledků jsme provedli několik měření způsobem popsáním v zadání úlohy (zmrazení vody v láhvi). V grafické podobě jsou zachyceny křížky v grafu. Naměřené hodnoty a jim odpovídající teoretické hodnoty jsou pro porovnání uvedeny v tabulce:

h/R	0,77	1,00	1,38	1,63
$T_{\text{exp}} [\text{s}]$	0,7	0,8	1,0	1,4
$T_{\text{teor}} [\text{s}]$	0,60	0,68	0,86	1,07

K experimentu jsme použili lehkou plastovou láhev o průměru $2R = 6,5 \text{ cm}$. Na základě teoretického vztahu je možné soudit, že malý poloměr nebude vhodný, neboť očekávaná frekvence kmitů bude velká, a tudíž perioda kmitů malá. To se skutečně potvrdilo. Měření nebylo snadné a hodnoty jsou jistě dosti nepřesné. Navíc se ukázalo, že zásadní roli hraje odpor prostředí, který jsme u teoretického výpočtu zanedbali. Kmity tělesa se proto velmi rychle utlumí. Přesto však naměřené hodnoty „kopírují“ tvar teoretické křivky. Navíc experimentální hodnoty periody vycházejí větší než teoretické, což odpovídá projevu odporu prostředí. Dá se tedy říci, že obě závislosti (teoretická i experimentální) jsou kvalitativně shodné.