

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

9. ročník — 2002/2003

Vzorové řešení třetí série úloh

(25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (6 bodů)

Elektroinstalátorská úloha

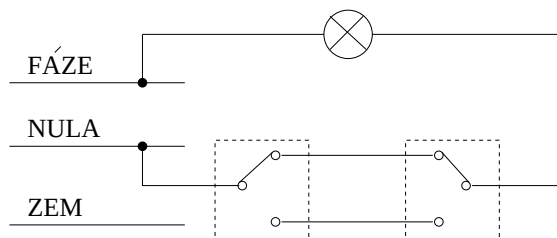
(a) „...od pantáty vedou dráty do žárovky nade vraty, odtud proud se přelévá do stodoly, do chléva...“ zpívá se ve známé písni Elektrický valčík. Ve skutečnosti je to dnes o trochu složitější. Základní princip trojfázové soustavy jistě znáte ze středoškolské učebnice fyziky. Napětí mezi fází a nulou je 230 V. Určitě také víte, že napětí je rozdíl potenciálů, a v tom se právě tyto dráty liší. Nulový vodič má potenciál stejný jako zem. V čem se tedy liší nula od země, když jsou na stejném potenciálu? Nulový vodič se používá k uzavření elektrického obvodu. To znamená, že pokud spotřebičem protéká proud, přestane být nulový vodič na potenciálu země, což mimo jiné znamená, že vás může pěkně „kopnout“. Drát označený jako zem je tu pouze kvůli bezpečnosti. U spotřebičů, které mají větší příkon (pračka, trouba, kamna, ...), je vždy kostra přístroje uzemněna pomocí zemnicího vodiče. Pokud potom dojde k takové poruše přístroje, že se fáze dotkne kostry, uzemní se spotřebič velice snadno přes zemnicí vodič a nikoliv přes tělo člověka, který se ho právě dotkne, či chystá dotknout. Uzemnění také způsobí proudový pulz, což má za následek, že lidově řečeno „vyletí pojistky“. O tom, že zemnění není nezbytně nutné, svědčí i to, že hodně staré rozvody elektřiny využívaly jen dva dráty. Nula a zem byly spojeny v jedno: ušetřilo se tak na materiálu, ale vodič nula–zem, který sloužil k uzavření elektrického obvodu, nebylo z pochopitelných důvodů možné připojit ke kostře.

Odpovědí na otázku, jak od sebe jednotlivé vodiče rozeznat, je mnoho. Nejčastěji se to dělá pomocí doutnavky. Je to vlastně taková malá výbojová trubice, v níž při přiložení dostatečně vysokého napětí dojde k zapálení doutnavého výboje a doutnavka se rozsvítí charakteristickým oranžovým světlem. Důvodem jejího výhodného použití je to, že výboj hoří při průchodu minimálního proudu (doutnavka má velký odpor a tedy malou spotřebu). Stačí se tedy jedním koncem doutnavky dotknout zkoumaného drátu a druhý konec uzemnit (dokonce stačí, že ho držíme v ruce). Pokud se výboj zapálí, pak jde o fázi. Pokud se výboj nezapálí, jde o nulu nebo o zem.

Nulu a zem nelze rozlišit přímo, bez využití rozvodů elektřiny. Všechny novější elektroinstalace však obsahují kromě standardních jističů ještě tzv. proudový chránič. Tento proudový chránič je připojen

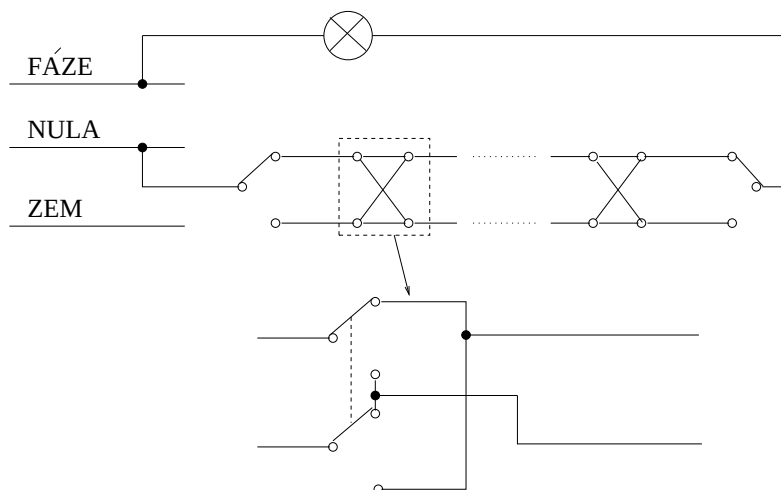
právě na zem a při průchodu i malého proudu (řádově miliampéry) přeruší všechny fáze. Stačí tedy vzít libovolný spotřebič, např. žárovku, a jedním vodičem ji připojit k fázi. Pokud nyní druhý vodič žárovky připojíme k nule, žárovka se rozsvítí. Pokud jej spojíme se zemí, proudový chránič přeruší fázi a žárovka svítit nebude.

(b) Zapojení znázorňuje obrázek 1.



Obrázek 1

(c) Zapojení znázorňuje obrázek 2.



Obrázek 2

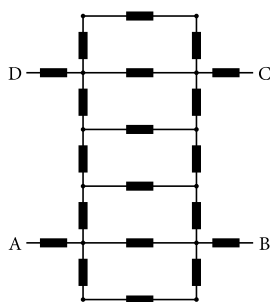
Vzorové řešení úlohy č. 2 (8 bodů)

Vyhřívání postel

Na rezistoru o odporu R , k němuž je přiložen zdroj o napětí U , se za dobu τ uvolní teplo

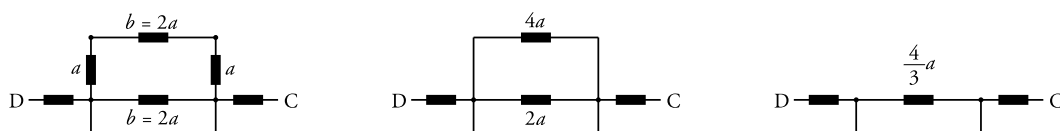
$$Q = \frac{U^2}{R} \tau. \quad (1)$$

Naším úkolem je zjistit, jak je třeba připojit zdroj napětí ke konstrukci postele, aby se člověk odpočívající na elektricky nevodivé matraci co nejvíce zahřál. Úloha se tedy redukuje na výpočet odporu postele mezi danými body.



Obrázek 3

Postel lze považovat za rezistorovou síť (obrázek 3). Skládá se z trubek dlouhých 50 cm nebo 100 cm, označme si proto $a = 50$ cm a $b = 2a = 100$ cm. Nyní obvod postupně zjednodušíme. Využijeme známá pravidla pro výpočet odporu sériově a paralelně zapojených rezistorů. Nejdříve nahradíme čelo postele jedním rezistorem (obrázek 4).



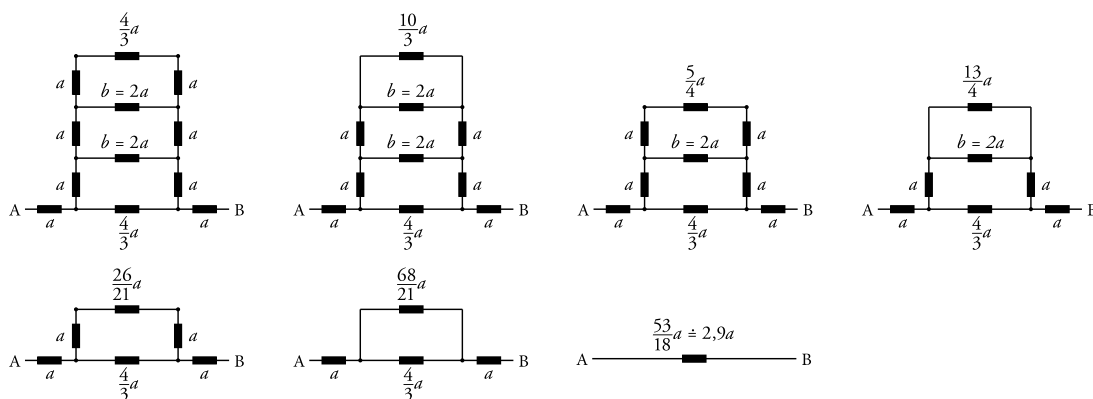
Obrázek 4

Zdroj napětí můžeme připojit různými způsoby:

1. k bodům A, B (nebo adekvátně k bodům C, D),
2. k bodům A, D (nebo adekvátně k bodům B, C),
3. k bodům A, C (nebo adekvátně k bodům B, D).

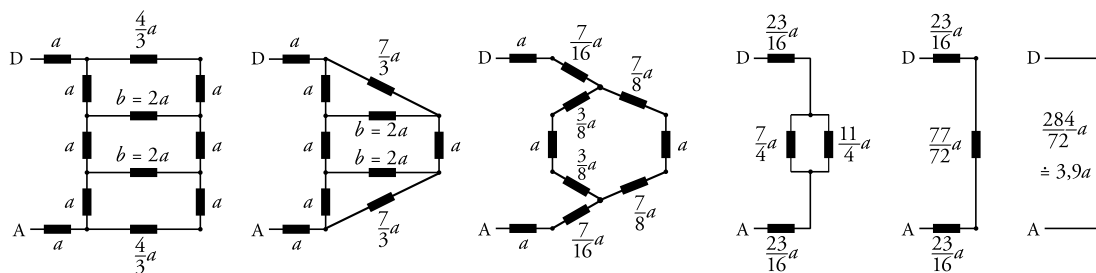
Pro každý způsob musíme dále postupovat samostatně.

1. Zdroj je připojen k bodům A, B – rezistory od bodů C, D (nohy postele) můžeme při výpočtu vypustit (obrázek 5).



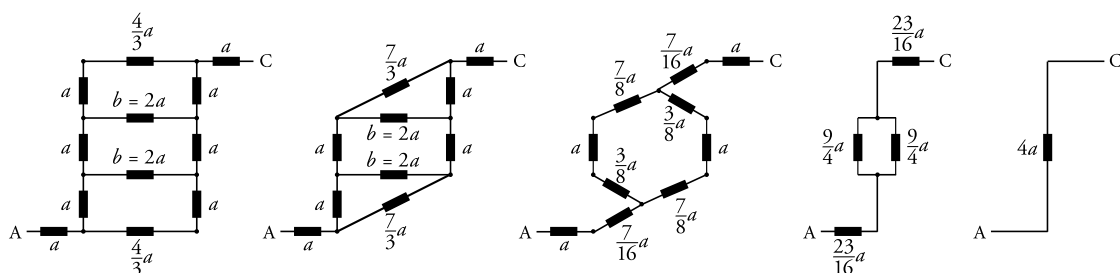
Obrázek 5

2. Zdroj je připojen k bodům A, D – rezistory od bodů B, C (nohy postele) můžeme při výpočtu vypustit. Při zjednodušování obvodu využijeme také vztahy pro převod části obvodu ve tvaru „trojúhelníku“ na část obvodu ve tvaru „hvězdy“ (obrázek 6).



Obrázek 6

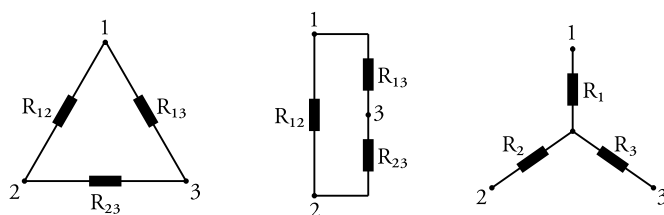
3. Zdroj je připojen k bodům A, C – rezistory od bodů B, D (nohy postele) můžeme při výpočtu vypustit. Toto řešení využívá stejné vztahy jako řešení předchozí (obrázek 7).



Obrázek 7

Zadání úlohy tedy nejlépe vyhovuje připojení zdroje napětí k bodům A a B nebo k bodům C a D, protože mezi těmito dvojicemi bodů má postel dle vztahu (1) nejmenší odpor.

Zbývá odvodit převodní vztahy mezi rezistory zapojenými do „trojúhelníku“ a rezistory zapojenými do „hvězdy“ (obrázek 8).



Obrázek 8

Začneme tím, že si vyjádříme odpor mezi jednotlivými body. Mezi body 1 a 2 je přímo zapojen rezistor R_{12} , avšak k němu jsou ještě paralelně zapojeny rezistory R_{13} a R_{23} . Součet odporů R_1 a R_2 musí být roven odporu mezi body 1 a 2, tj.:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (2)$$

Stejným způsobem určíme odpor mezi zbývajících dvojicemi bodů a dostaneme další dvě rovnice:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (3)$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (4)$$

Vyřešením rovnic (2), (3) a (4), kde R_1 , R_2 a R_3 jsou neznámé, získáme hledané vztahy pro výpočet odporu rezistorů R_1 , R_2 a R_3 :

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (5)$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad (6)$$

$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (7)$$

Vzorové řešení úlohy č. 3 (5 bodů)

Skleněná trubička

Na trubičku se díváme z velké vzdálenosti, to znamená, že pozorujeme pouze paprsky rovnoběžné s optickou osou soustavy. Ta je v našem případě kolmá na osu trubičky. Zdánlivý vnitřní poloměr trubičky je zřejmě roven vzdálenosti x paprsku, který tečně míjí vnitřní prostor trubičky, od optické osy (obrázek 9). Každý paprsek, který bude blíže optické ose, projde vnitřním prostorem trubičky a naopak paprsek, který bude dále od optické osy, vnitřní prostor trubičky mine¹.

Na rozhraní vzduch–vnější okraj trubičky je splněn Snellův zákon

$$n \sin \beta = \sin \alpha, \quad (1)$$

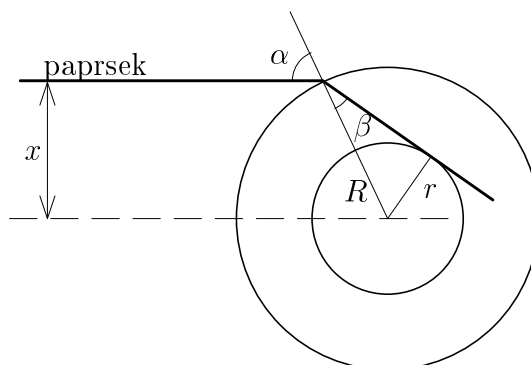
kde n je index lomu skla, z něhož je trubička vyrobena. Platí také

$$\sin \beta = \frac{r}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{x}{R}. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) plyne

$$x = nr, \quad (3)$$

neboli zdánlivý průměr je n -násobkem skutečného průměru vnitřního prostoru. A teď k druhé otázce ze zadání: je možné, aby se nám vnitřní průměr jevil větší než ten vnější? Může být přece splněno $x = nr > R$! Nesmíme však zapomínat, že uvedené vztahy platí pouze pro paprsky, které se lámou na vnějším povrchu trubičky, tedy pro ty, pro které je vzdálenost od optické osy menší než R . Není proto možné, aby se vnitřní průměr jevil větší než průměr vnější!



Obrázek 9

¹ Ještě lépe si lze celou situaci představit tak, že bychom vnitřní prostor trubičky naplnili černým inkoustem. Pak by paprsky, které by vnitřním prostorem procházely, byly pohlceny. . .

Vzorové řešení úlohy č. 4 (6 bodů)

Porušený kabel

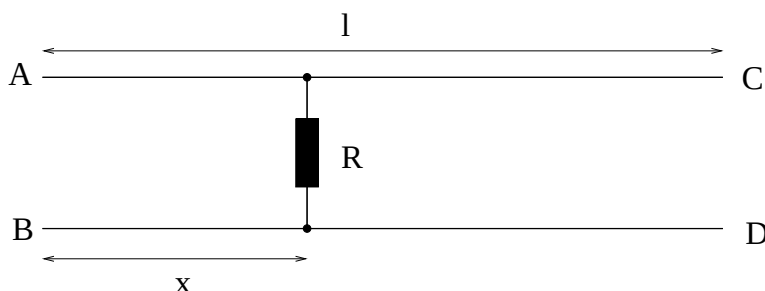
Nejprve je vhodné udělat si jednoduché schéma vzniklé situace (obrázek 10). Je vidět, že úloha má dvě neznámé: hledanou vzdálenost x poruchy a velikost odporu vodivého spojení R . K výpočtu potřebujeme znát odpor jednotkové délky vodiče (označme jej ρ), ze kterého jsou kabely vyrobeny. Tento údaj u podobných kabelů většinou známe, případně je možné jej lehce vypočítat z průřezu vodiče a z měrného odporu kovu, ze kterého je vyroben. Nyní nám stačí ohmmetrem změřit odpor R_{AB} mezi body A a B a odpor R_{CD} mezi body C a D. Pro tyto odpory bude platit

$$R_{AB} = 2x\rho + R, \quad (1)$$

$$R_{CD} = 2(l-x)\rho + R, \quad (2)$$

kde l je celková délka kabelu. Z rovnic vyloučíme neznámou R a po úpravě dostaneme obecný výsledek

$$x = \frac{R_{AB} - R_{CD}}{4\rho} + \frac{l}{2}. \quad (3)$$



Obrázek 10

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Měření Eulerova čísla

Nejprve provedeme odvození vztahu pro tvar řetězovky $y(x)$. Pro výpočet zavedeme kartézskou soustavu souřadnic Oxy s osou y nesouhlasně rovnoběžnou s vektorem tíhového zrychlení $\vec{g}$. Předpokládejme, že řetízek je zavěšen v bodech $(-d, h)$, (d, h) . Řetízek budeme aproximovat homogenním tělesem s lineární hustotou $^2 \mu$. Výpočet rozdělíme do tří kroků.

1. Sestavení diferenciálních rovnic

Uvažme úsek řetízku od bodu $(-d, h)$ do obecně zvoleného bodu (x, y) . Délka tohoto úseku je (podle známého vzorce z matematické analýzy) rovna

$$l(x) = \int_{-d}^x \sqrt{1 + (y'(\tau))^2} d\tau. \quad (1)$$

²Je na místě vysvětlit pojem *lineární hustota*. Jestliže pracujeme s objektem, jehož body popisujeme pouze jednou souřadnicí (např. libovolný bod řetízku lze jednoznačně popsat pomocí vzdálenosti od zvoleného konce řetízku), je výhodné místo běžné hustoty zavést právě lineární hustotu, definovanou jako hmotnost délkové jednotky objektu (v našem případě hmotnost 1 m řetízku).

Tíhová síla působící na tento úsek je proto

$$\vec{F}_G = \left(0, -g\mu \int_{-d}^x \sqrt{1 + (y'(\tau))^2} d\tau \right). \quad (2)$$

Podél křivky $y(x)$ popisující tvar řetízku zavedme vektorové pole, které vyjadřuje vzájemné působení dvou úseků řetízku³: necht' $\vec{F}(x_0)$ je síla, kterou působí úsek řetízku s x -ovou souřadnicí větší než x_0 na úsek s x -ovou souřadnicí menší než x_0 ; opačné působení úseků pak vyjadřuje síla $-\vec{F}(x_0)$.

V koncových bodech uvažovaného úseku řetízku působí síly, které jej udržují v rovnováze. V bodě $(-d, h)$ je to síla

$$-\vec{F}(-d) = (-F_x(-d), -F_y(-d)) \quad (3)$$

a v bodě (x, y) síla

$$\vec{F}(x) = (F_x(x), F_y(x)). \quad (4)$$

Podmínky silové rovnováhy uvažovaného úseku řetízku jsou proto

$$-F_x(-d) + F_x(x) = 0, \quad (5)$$

$$-g\mu \int_{-d}^x \sqrt{1 + (y'(\tau))^2} d\tau - F_y(-d) + F_y(x) = 0. \quad (6)$$

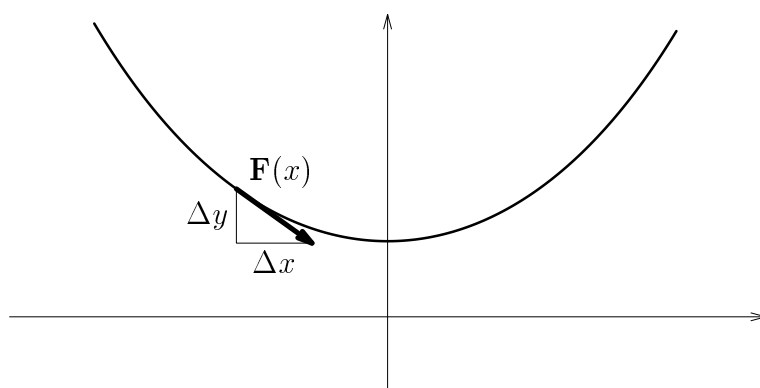
$$(7)$$

Okamžitě vidíme, že složka F_x je konstantní. Pro složku F_y jsme dostali rovnici, jejímž zderivováním vychází rovnice diferenciální:

$$-g\mu \sqrt{1 + (y'(x))^2} + F'_y(x) = 0. \quad (8)$$

Síla $\vec{F}$ působí v každém bodě kolmo k průřezu řetízku, tzn. tečně ke křivce, kterou řetízek zaujme. Odtud dostáváme potřebný vztah mezi $F_y(x)$ a derivací křivky $y(x)$ (obrázek 11):

$$\frac{F_y(x)}{F_x} = y'(x). \quad (9)$$



Obrázek 11

Dosazením vztahu (9) do rovnice (8) dospějeme k diferenciální rovnici pro neznámou funkci $F(y)$:

$$F'_y(x) = \mu g \sqrt{1 + \left(\frac{F_y(x)}{F_x} \right)^2}. \quad (10)$$

³ Znamená to tedy, že do každého bodu řetízku umístíme vektor příslušné síly.

2. Řešení rovnic (9) a (10)

Již víme, že složka F_x je konstantní. Rovnici pro F_y tedy můžeme řešit metodou separace proměnných⁴.

$$\frac{F_y'}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_y}{F_x}\right)^2}} = \mu g \implies \operatorname{argsinh} \frac{F_y}{F_x} = \frac{\mu g}{F_x} x + C, \quad (11)$$

kde C je integrační konstanta a $\operatorname{argsinh} s$ je funkce inverzní k funkci hyperbolický sinus definované vztahem

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (12)$$

Platí-li tedy $t = \operatorname{argsinh} s$, potom $s = \sinh t$. Tím dostáváme

$$\frac{F_y}{F_x} = \sinh \left(\frac{\mu g}{F_x} x + C \right). \quad (13)$$

Dosazením tohoto výsledku do rovnice (9) dostaneme

$$y' = \sinh \left(\frac{\mu g}{F_x} x + C \right). \quad (14)$$

Dospěli jsme tak k diferenciální rovnici pro neznámou funkci $y(x)$. Její řešení najdeme integrací:

$$y = \frac{F_x}{\mu g} \cosh \left(\frac{\mu g}{F_x} x + C \right) + D, \quad (15)$$

kde D je integrační konstanta.

3. Aplikace okrajových podmínek

Řetízek máme zavěšený symetricky podle osy y , proto je

$$C = 0. \quad (16)$$

Dále, ve vzdálenosti d od osy y je výška řetízku h , tj.

$$h = \frac{F_x}{\mu g} \cosh \left(\frac{\mu g}{F_x} d \right) + D \implies D = h - \frac{F_x}{\mu g} \cosh \left(\frac{\mu g}{F_x} d \right). \quad (17)$$

Při označení

$$A = \frac{F_x}{\mu g}, \quad B = D \quad (18)$$

obdržíme vyjádření křivky, kterou řetízek zaujme, ve tvaru

$$y = A \cosh \frac{x}{A} + B. \quad (19)$$

Pro další úvahy se nám bude hodit ještě jeden vztah. Známe-li totiž délku l řetízku, plyne ze vzorce pro délku rovinné křivky

$$l = \int_{-d}^d \sqrt{1 + (y'(\tau))^2} d\tau = \int_{-d}^d \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{\tau}{A} \right)^2} d\tau = 2A \sinh \frac{d}{A}. \quad (20)$$

⁴Potřebné integrály lze najít např. v knize: H.J. Bartsch: Matematické vzorce.

A nyní již k vlastnímu určení Eulerova čísla.

Víme, že derivace funkce je směrnice tečny ke křivce v daném bodě a směrnice je tangenta směrového úhlu α . Proto derivace řetězovky v bodě $x = d$ je

$$\left(A \cosh \frac{x}{A} + B \right)'_{x=d} = \sinh \frac{d}{A} = \tan \alpha. \quad (21)$$

Podle vztahu (20) pro délku řetězovky dále máme

$$l = 2A \sinh \frac{d}{A}, \quad (22)$$

což společně s (21) dává

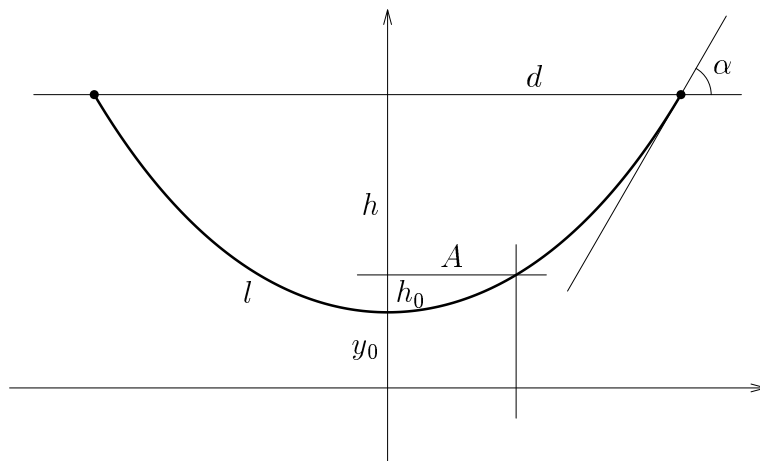
$$A = \frac{l}{2 \tan \alpha}. \quad (23)$$

Dosazením $x = 0$ do rovnice řetězovky (19) dostaneme (obrázek 12)

$$y_0 = A + B, \quad (24)$$

dosazením $x = A$ do stejné rovnice dostaneme

$$y_0 + h_0 = A \cosh 1 + B. \quad (25)$$



Obrázek 12

Odečtením rovnic (24) a (25) získáme

$$h_0 = A \cosh 1 - A, \quad (26)$$

což s využitím vztahu (23) pro konstantu A po úpravě dává

$$\cosh 1 = \frac{h_0}{A} + 1 = 2 \frac{h_0}{l} \tan \alpha + 1. \quad (27)$$

Uvědomíme-li si, co dostaneme po dosazení 1 do definičního vztahu pro hyperbolický kosinus, můžeme pokračovat:

$$\cosh 1 = \frac{e + e^{-1}}{2} \implies e^2 - 2e \cosh 1 + 1 = 0. \quad (28)$$

Obdrželi jsme kvadratickou rovnici pro e . Jejím řešením a dosazením za $\cosh 1$ ze vztahu (27) dostáváme

$$e = \cosh 1 + \sqrt{\cosh^2 1 - 1} = 2 \frac{h_0}{l} \tan \alpha + 1 + \sqrt{4 \frac{h_0}{l} \tan \alpha \left(\frac{h_0}{l} \tan \alpha + 1 \right)}, \quad (29)$$

kde jsme vzali větší kořen kvadratické rovnice, protože $e > 1$. Druhý kořen kvadratické rovnice dává převrácenou hodnotu e .

Postup při měření Eulerova čísla je tedy tento: Nejprve jsem změřil délku řetízku l . V místě, kde jsem upevnil jeden konec řetízku, jsem si od vodorovné přímky odměřil úhel 60° a druhý konec řetízku jsem upevnil v takové vzdálenosti $2d$ od prvního konce, aby tečna v místě uchycení měla směrnici právě 60° (tedy aby splynula s nakreslenou přímkou)⁵. Tím jsem mohl určit konstantu A (vztah (23)) a ve vzdálenosti A od osy symetrie zavěšeného řetízku narýsovat svislou přímku. Nyní již stačilo zaznamenat nejnižší bod řetězovky a bod, kde protнула svislici ve vzdálenosti A , a tím určit vzdálenost h_0 .

Číselně jsem dostal tyto údaje: $l = 52,0$ cm, $\tan \alpha = \sqrt{3}$, tedy $A = 15,0$ cm, dále $h_0 = 8,5$ cm. Po dosazení do (29) vyšla hodnota $e = 2,77$. Přesná hodnota Eulerova čísla je

$$e_{\text{přesně}} = 2,7182818284\dots$$

Hodnotu e jsem tedy určil s přesností asi 2%.

⁵Úhel 60° jsem volil proto, aby vyšla „pěkná“ hodnota $\tan \alpha$. Samozřejmě lze volit i jiný úhel.