

FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

9. ročník — 2002/2003

Vzorové řešení čtvrté série úloh (25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (5 bodů)

Praktikum z vodních radovánek

Vyzkoušeli jste si experimenty prakticky? Pokud ano, bylo pro vás jistě snadné na dané otázky odpovědět.

- *Pozorování*

(a) Barvy:

Přemýšleli jste někdy, proč je voda modrá? Příčinou je rozptyl světla. Při pohledu na vodní plochu totiž pozorujeme (kromě části světla, které se odráží od hladiny) také světlo, které voda rozptyluje. Nejvíce je rozptylována krátkovlnná část spektra, proto se větší množství (čisté) vody jeví jako modré. A jak je to s barvami pozorovanými pod vodou? V tomto případě se kromě rozptylu uplatní také absorpce světla. Voda nejvíce absorbuje dlouhovlnnou část spektra, proto se například červené plavky jeví z větší vzdálenosti jako naředlé až temné. Celkově platí, že všechny barvy jsou pod vodou méně kontrastní než na souši.

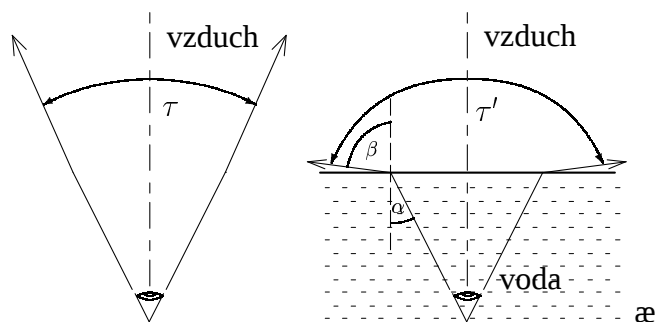
(b) Zorné pole:

Na obrázku 1 je znázorněno zorné pole pozorovatele ležícího na hladině¹ a zorné pole pozorovatele pod vodou. V důsledku lomu světla na rozhraní vzduch–voda jsou zorná pole těchto pozorovatelů různá. Označíme-li n_1 , resp. n_2 index lomu vzduchu, resp. vody a β , resp. α úhel dopadu, resp. úhel lomu světla, platí (Snellův zákon):

$$n_1 \sin \beta = n_2 \sin \alpha. \quad (1)$$

Protože $n_1 < n_2$ ($n_1 \doteq 1$, $n_2 \doteq 1,33$), dochází na rozhraní vzduch–voda k lomu světla ke kolmici. Zorné pole pozorovatele pod vodou je tedy větší.

¹Úhel τ označuje vrcholový úhel kužele, který ohraničuje zorné pole.



Obrázek 1

(c) Vzduchové bubliny:

Všimněme si lomu světla na povrchu bubliny, tj. na rozhraní voda–vzduch. Světlo se zde láme od kolmice. Ze Snellova zákona plyne, že při jistém úhlu dopadu (tzv. mezní úhel) je úhel lomu 180° , pro větší úhly dopadu se pak veškeré dopadající světlo odráží. Právě tento jev (tzv. totální odraz světla) je příčinou lesku vzduchových bublin.

- *Poslech*

Zvuk se ve vodě šíří vyšší rychlostí než ve vzduchu². Lidský mozek je však zvyklý zpracovávat zvukové vlny šířící se vzduchem a nedokáže se jinému prostředí rychle přizpůsobit. Proto se nám zdá, že zvuk přichází z jiné vzdálenosti a z jiného směru³.

Mluvit pod vodou už tak snadné není. Lidské hlasové ústrojí funguje na principu rozkmitávání vzduchu, který není možné nahradit vodou. Můžete sice vydávat různé zvuky, ovšem se zavřenými ústy (například broukání).

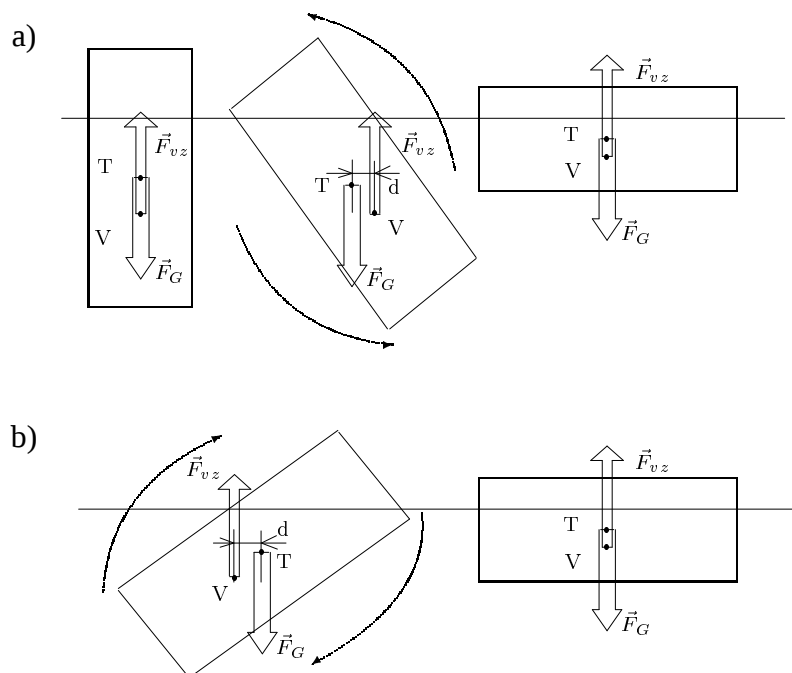
- *Pokus*

Nejprve definujeme bod vztlaku: rozumíme jím těžiště kapalinového tělesa, které má stejný tvar jako ponořená část tělesa. Bodem vztlaku tedy prochází vektorová přímka hydrostatické vztlakové síly.

A proč se některá tělesa ve vodě překlápějí? Situaci nejlépe vysvětlíme na dřevěném kvádru. Předpokládejme nejprve, že kvádr umístíme do polohy znázorněné na obrázku 2a. Kvádr je v rovnovážné poloze, protože výslednice tíhové síly (působí v těžišti T) a hydrostatické vztlakové síly (působí v bodě vztlaku V) je nulová a moment těchto sil je rovněž nulový. Pokud kvádr nepatrně vychýlíme, změní se poloha bodu vztlaku. Výsledný moment tíhové síly a hydrostatické vztlakové síly vzhledem k těžišti kvádru bude nenulový a bude mít takový směr, že kvádr přejde do nové rovnovážné polohy. Jestliže se jej z této polohy pokusíme vychýlit (obrázek 2b), opět se změní poloha bodu vztlaku, ale tentokrát výsledný moment tíhové síly a hydrostatické vztlakové síly vrátí kvádr zpět. Původní rovnovážná poloha na obrázku 2a je tedy vratká, zatímco nová rovnovážná poloha je stálá.

²Při teplotě 20°C je rychlost zvuku ve vzduchu $343\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, kdežto ve vodě je $1482\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

³Místo, odkud slyšíme zvuk přicházet, určuje mozek na základě časového rozdílu mezi příchodem zvuku k levému a k pravému uchu.



Obrázek 2

Poněkud složitější je otázka, zda se „vodní akrobat“ udrží ve svislé poloze. Člověk totiž (na rozdíl od dřevěného kvádru) více či méně vědomě neustále ovlivňuje svoji polohu, například různým napětím svalů nebo různým naplněním plic vzduchem. Avšak možnost, že se akrobat poslopností vhodných manévřů dostane do rovnovážné polohy vratké a bez jakéhokoli dalšího úsilí v ní setrvá, je vyloučena.

- *Na závěr*

Medvídek Pú s Prasátkem se pokusili hodit za Ijáčka kámen a doufali, že ho vzniklé vlny vyplaví na břeh. To však není možné, protože vlnění na vodní hladině spočívá ve vertikálním (nikoli horizontálním) pohybu molekul vody. Kdyby se Ijáček nerozhodl vyřešit situaci sám, houpal by se pouze na vlnách nahoru a dolů.

Vzorové řešení úlohy č. 2 (8 bodů)

Paradox ze speciální teorie relativity

Všimněme si nejprve myšlenkového experimentu uvedeného v poznámce k zadání úlohy. Nechť je ve středu vagónu, který se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí v , zapnut světelný zdroj. Průvodčí zjistí, že světlo ze zdroje dopadne na detektory umístěné na koncích vagónu současně, neboť dráha, kterou musí světlo urazit ke každému z detektorů, je stejná.

Podle Einsteinova postulátu se však světlo šíří stejnou rychlostí i vzhledem k libovolné jiné inerciální vztažné soustavě, tedy například k nástupišti. Výpravčí proto uvidí nejprve dopadnout světlo na zadní stěnu (ta mu jede „vstříc“) a pak teprve na přední. Časový rozdíl mezi těmito dvěma událostmi lze zjistit snadno. Označme l' klidovou délku vagónu (v soustavě S' s ním spojené), l kontrahovanou délku vagónu (v soustavě S spojené s nástupištem), t_1

okamžik dopadu světla na zadní detektor, t_2 okamžik dopadu světla na přední detektor a c rychlost světla. Platí:

$$t_1 = \frac{l}{2(c+v)}, \quad t_2 = \frac{l}{2(c-v)}. \quad (1)$$

Časový rozdíl mezi dvěma událostmi, vzdálenými v soustavě S o délku l , je tedy

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = \frac{l}{2(c-v)} - \frac{l}{2(c+v)} = \frac{vl}{(c^2 - v^2)}. \quad (2)$$

A nyní k vlastnímu řešení úlohy. Aby se elektromagnetický signál dostal přes hradlo a žárovka se rozsvítila, musejí být spínače v klidové soustavě S' sepnuty minimálně po dobu

$$t' = \frac{d'}{c}. \quad (3)$$

V soustavě S je v důsledku dilatace času každý ze spínačů sepnut po dobu

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (4)$$

Vzhledem k relativnosti současnosti je pak podle vztahu (2) přední spínač sepnut o dobu

$$\Delta t = \frac{vd}{(c^2 - v^2)} \quad (5)$$

později, kde

$$d = d' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (6)$$

je kontrahovaná délka hradla v soustavě S .

Podívejme se na problém z druhé strany. Protože se žárovka rozsvítí jak v soustavě S' , tak i v soustavě S (absolutní událost), musí se elektromagnetický signál v okamžiku vypnutí příslušného spínače dostat alespoň k němu. Situace je tedy v soustavě S popsána následovně:

1. Po dobu t je sepnut zadní spínač, hradlem je vyslán vpřed elektromagnetický signál rychlostí c .
2. Za dobu Δt určenou vztahem (5) se sepne na stejnou dobu t přední spínač.

Pokud se má elektromagnetický signál dostat k přednímu spínači právě v okamžiku jeho vypnutí, musí platit

$$\frac{d}{c-v} = t + \Delta t. \quad (7)$$

Analogicky pro druhý spínač

$$\frac{d}{c+v} = t - \Delta t. \quad (8)$$

Dosadíme-li do posledních dvou vztahů výsledky (3)–(6), dostáváme identity, a proto k žádnému paradoxu nedochází.

Vzorové řešení úlohy č. 3 (6 bodů)

Zmenšené modely

(a) Začneme obecnou úvahou. Jestliže se rozměry nějakého tělesa zmenší k -krát, pak se jeho objem zmenší k^3 -krát. (To si lze snadno představit na příkladu krychličky.) Pokud je k -krát zmenšený model planety vyrobený z materiálu o stejné hustotě jako skutečná planeta, bude hmotnost modelu k^3 -krát menší než hmotnost skutečné planety. Pro vzdálenosti, objemy a hmotnosti tedy platí

$$r_{\text{model}} = \frac{1}{k} r, \quad V_{\text{model}} = \frac{1}{k^3} V, \quad m_{\text{model}} = \frac{1}{k^3} m. \quad (1)$$

V kruhovém pohybu okolo Slunce udržuje planety gravitační síla, která je silou dostředivou, proto

$$F_g = \kappa \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r, \quad (2)$$

kde m je hmotnost planety, r její vzdálenost od Slunce, M hmotnost Slunce a ω úhlová rychlost planety. Pro úhlovou rychlost planety odtud vychází

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa M}{r^3}}. \quad (3)$$

Tento vztah platí jak pro skutečnou planetu, tak pro její model. Dosadíme-li do něj výsledky (1), dostáváme

$$\omega_{\text{model}} = \sqrt{\frac{\kappa M_{\text{model}}}{r_{\text{model}}^3}} = \sqrt{\frac{\kappa M/k^3}{(r/k)^3}} = \sqrt{\frac{\kappa M}{r^3}} = \omega. \quad (4)$$

Vidíme, že velikost modelu nemá na úhlové rychlosti planet a tím také na jejich oběžné doby žádný vliv.

(b) Víme, že síla, kterou je sval schopný vyvinout, je úměrná plošnému obsahu jeho průřezu. Tedy svaly k -krát zmenšeného slona budou schopny vyvinout k^2 -krát menší sílu. Chceme-li odhadnout, jak rychle bude moci slon otáčet hlavou, musíme počítat s momentem síly, který vyvíjejí krční svaly. Je zřejmé, že u k -krát menšího slona bude i rameno síly k -krát menší. Celkově bude moment síly u sloníka k^3 -krát menší než u velkého slona:

$$F_{\text{model}} = \frac{1}{k^2} F, \quad M_{\text{model}} = \frac{1}{k^3} M. \quad (5)$$

Dále víme, že zrychlení ε tělesa získáme ze vztahu

$$M = J\varepsilon, \quad (6)$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa. Tak je tomu i u sloní hlavy. A jaký bude moment setrvačnosti hlavy zmenšeného slona oproti velkému? Moment setrvačnosti libovolného tělesa vzhledem k dané ose vypočteme tak, že těleso rozdělíme na velmi malé kousíčky, vypočteme moment setrvačnosti každého z nich vzhledem k dané ose podle vztahu

$$J_i = m_i r_i^2, \quad (7)$$

kde m_i je hmotnost kousíčku a r_i jeho vzdálenost od osy a tyto příspěvky sečteme⁴. Na začátku jsme ukázali, že hmotnost k -krát zmenšeného tělesa je k^3 -krát menší. Vzdálenost jednotlivých

⁴Přesně takovým postupem se získají vzorce pro moment setrvačnosti koule, válce apod., které znáte z tabulek.

kousíčků tělesa od osy bude k -krát menší. Moment setrvačnosti hlavy k -krát menšího sloníka je tedy k^5 -krát menší než u skutečného slona. Pro úhlové zrychlení, které bude sloník schopen vyvinout při otáčení hlavou, tedy máme

$$\varepsilon_{\text{model}} = \frac{M_{\text{model}}}{J_{\text{model}}} = \frac{M/k^3}{J/k^5} = k^2 \varepsilon. \quad (8)$$

A přesně jak jsme očekávali, k -krát menší sloník bude schopen při otáčení hlavičkou vyvinout k^2 -krát **větší** úhlové zrychlení. Zatímco velký slon může kývat hlavou tak akorát do rytmu pohřebního pochodu, 10-krát menší sloník to zvládne rychleji. Může tedy směle jít na diskotéku! Být malý má prostě i své výhody.

Všimněte si ještě, že v řešení této úlohy jsme vůbec nepotřebovali uvažovat třeba o konkrétním tvaru hlavy slona, abychom spočítali její moment setrvačnosti. Stačí, že víme, že rozměry systému jsou v jistém vztahu k rozměrům jiného systému, a už jsme schopni zjistit, v jakém vztahu budou některé dynamické veličiny v obou systémech (moment síly, moment setrvačnosti atd.).

Vzorové řešení úlohy č. 4 (6 bodů)

Zrcadlo, zrcadlo,...

(a) Obraz v zrcadle se opravdu jeví jako stranově převrácený. Tento jev ale nemá na svědomí zrcadlo. Rovinné zrcadlo totiž obraz nepřevrací ani stranově, ani výškově. Celý problém spočívá v tom, že náš mozek věci, které vidíme, určitým způsobem zpracovává. Pokud potkáme na ulici člověka a díváme se na něj, jsme zvyklí vidět jeho levou ruku naproti svojí pravé a stejně tak jeho pravou ruku na místě svojí levé. Když se podíváme do zrcadla, vidíme pravou ruku obrazu naproti svojí pravé ruce a levou ruku obrazu naproti svojí levé ruce. Proto se nám obraz jeví stranově převrácený.

(b) Označíme-li počáteční intenzitu světla dopadajícího na zrcadlo I_0 , potom pro intenzitu světla po n odrazech platí

$$I = (0,8)^n I_0. \quad (1)$$

Královna ještě vidí obraz o intenzitě $I_{\min} = 0,3 \cdot I_0$. Pokud chceme zjistit, po kolika odrazech se královna ještě může spatřit, řešíme nerovnici

$$0,3 \cdot I_0 \geq (0,8)^n I_0, \quad (2)$$

z níž vychází

$$n \leq \frac{\log 0,3}{\log 0,8} \doteq 5,4. \quad (3)$$

Vzhledem k tomu, že počet odrazů světla mezi zrcadly může být jen celé číslo, spatří královna světlo odražené nejvýše pětkrát. A jak jsou umístěny jednotlivé obrazy? První odraz se uskuteční na zrcadle před královnou, v němž vidí svůj první obraz. Druhý odraz probíhá za zády královny: na druhé zrcadlo dopadá obraz z prvního zrcadla a odráží se zpět k prvnímu zrcadlu (obraz v druhém zrcadle královna samozřejmě nevidí). Ke třetímu odrazu dojde opět na první zrcadle: královna v něm tedy spatří další, již druhý svůj obraz. Podobně lze uvažovat dále. Dohromady tedy královna vidí tři své obrazy, všechny v zrcadle před sebou.

To, co jsme uvedli, platí pro obrazy obličeje. Nyní zjistíme, kolikrát se královna vidí zezadu.

Paprsky se poprvé odrážejí v zrcadle za královnou. Svoje záda tedy poprvé uvidí po druhém odrazu. Stejně tak je uvidí po čtvrtém odrazu. Poslední, pátý, odraz se uskuteční opět v zadním zrcadle. Celkem vidí královna v zrcadle před sebou třikrát svůj obličej a dvakrát svoje záda – vidí se pětkrát.

Poznámka k vašim řešením: Často jste si pletli pojmy obraz a odraz. Pokud jste pouze uvedli, že královna vidí pět svých obrazů a nepodalí jste bližší komentář (obrazy obličejů a zad), nebylo řešení považováno za úplné.

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

Odpor prostředí při jízdě na kole

Podstata měření vychází ze základního fyzikálního principu – ze zákona zachování energie. Známe-li totiž rychlost v_1 , kterou cyklista vjíždí do daného úseku, rychlost v_2 , kterou z něj vyjíždí a hmotnost m soustavy „cyklista+kolo“, lze za předpokladu, že se jedná o jízdu po rovině, určit ztrátu kinetické energie soustavy „cyklista+kolo“

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_1)^2 - \frac{1}{2}m(v_2)^2. \quad (1)$$

Známe-li dále čas Δt , po který cyklista vymezeným úsekem projížděl, můžeme vyjádřit výkon odporových sil

$$P = \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2}m \frac{(v_1)^2 - (v_2)^2}{\Delta t}. \quad (2)$$

Základním problémem vlastního měření je volba vhodně dlouhého úseku. Na jedné straně potřebujeme úsek dostatečně dlouhý na to, abychom dosáhli požadované přesnosti měření (necháme odporovou sílu „pořádně dlouho působit“). Tím se ale zvětšuje obor rychlostí, což zhoršuje přesnost údaje o konkrétní rychlosti, při níž bylo měření prováděno. Rychlost jízdy měříme digitálním tachometrem na kole. Jeho jedinou nevýhodou je velká reakční doba, proto musíme do vymezeného úseku vjíždět pokud možno rovnoměrně. V měření dráhy ani času by neměl být větší problém. Hmotnost soustavy „cyklisty+kolo“ známe.

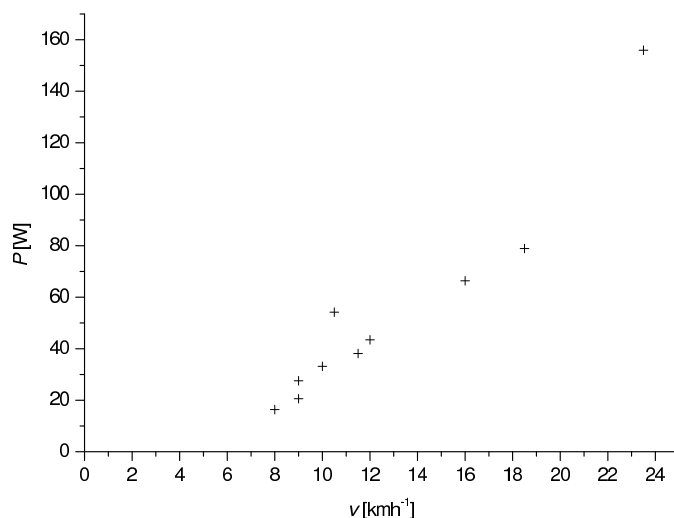
Vlastní měření a jeho výsledky:

Měření, při němž se zjišťovala závislost výkonu odporových sil na různých parametrech, bylo provedeno s horským kolem. Výsledek je uveden ve tvaru závislosti výkonu odporových sil na rychlosti jízdy (viz graf), z níž je dobře patrný vliv podhuštěných pneumatik při rychlosti přibližně 10 km.h^{-1} (odporová síla je větší). Dále byl testován vliv kvality jízdní dráhy na odporovou sílu, a to tak, že některé jízdy byly provedeny na silnici pokryté tenkou vrstvou uježděného sněhu (tato skutečnost se nijak významně neprojevila). Z grafu je vidět, že pro rozsah rychlostí 10 km.h^{-1} – 25 km.h^{-1} se výkon odporových sil pohybuje v rozmezí 30 W–160 W. Pro srovnání uvádíme, že tepelný výkon člověka v klidu je asi 80 W.

Protože popsaná metoda neumožňuje změřit výkon pro velké rychlosti, můžeme měření doplnit následujícím odhadem: Pokud jedeme z prudkého kopce, jehož sklon známe, a necháme kolo rozjet na maximální možnou rychlost (není-li to pro cyklistu příliš nebezpečné), spotřebuje se změna potenciální energie tíhové ΔE_p na překonání odporu vzduchu. Pro výkon odporové síly pak bude platit

$$P = \frac{\Delta E_p}{\Delta t} = \frac{\Delta E_p v}{\Delta s} = \frac{mg\Delta h v}{\Delta s} = mgv\kappa, \quad (3)$$

kde $\kappa = \frac{\Delta h}{\Delta s}$ je sklon kopce. Po dosazení naměřených, resp. odhadnutých hodnot $\kappa=0,12$; $m=85$ kg; $v=60$ km.h⁻¹ vychází $P = 1700$ W.



Na závěr uvedeme pro názornější představu všech cyklistů jednu konkrétní situaci. Při výjezdu po horské silnici ke Grossglocknerskému ledovci v Alpách (opravdu skvělý výšlap!) musí cyklista překonat převýšení asi 1500 m na vzdálenosti 25 km. Předpokládáme-li, že jede do kopce průměrnou rychlostí 10 km.h⁻¹, vychází odhadem z grafu výkon odporových sil 30 W a jejich práce pak -270 kJ (odporové síly míří proti pohybu, proto záporné znaménko). To odpovídá případu, kdy cyklista po ideální silnici vyveze na vrchol 18 kg zátěže navíc.